Kollektive Beschreibung von Austauschreaktionen in Schwerionenstößen

Inauguraldissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der
Freien Universität Berlin
Fachbereich Physik

vorgelegt von Ulrich Brosa aus Berlin

April 1979

Kollektive Beschreibung von Austauschreaktionen in Schwerionenstößen

Inauguraldissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der
Freien Universität Berlin
Fachbereich Physik

vorgelegt von Ulrich Brosa aus Berlin

April 1979

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Gutachter: Prof. Dr. R. Lipperheide

2. Gutachter: Prof. Dr. H. Gabriel

Tag der mündlichen Prüfung: 26. NOV. 1979

Tag der Promotion:

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung 1

1. Einführung 2

1.1 Fragestellung 2
1.2 Die Diffusionsmodelle 3
1.3 Programm 6

2. Ladungsäquilibrierung 8

2.1 Experimentelle Ergebnisse und ihre Deutung 8
2.2 Erste Abschätzung des Trägheitsparameters κ 12
2.3 Zweite Abschätzung des Trägheitsparameters κ 18
2.4 Relaxationszeit der Ladungsäquilibrierung 20

3. Hydrodynamische Berechnung der Trägheitsparameter 23

3.1 Geometrie des Systems und Toruskoordinaten 24
3.2 Ersetzung des Neumannschen Randwertproblems durch ein Dirichletsches 27
3.3 Auswertung der Stromfunktion 30
3.3.1 Die Differentialgleichung der Stromfunktion 30
3.3.2 Die Randwerte 31
3.3.3 Anwendung der Mehler-Fock-Transformation 33
3.4 Der Trägheitstensor 35
3.5 Schwerpunktskorrekturen 44
3.6 Grenzfälle 45
3.7 Trägheitsparameter der Rotation 48

4. Dynamik des Tröpfchenstoßes 51

4.1 Die kräftefreie Bewegung 52
4.1.1 Aufstellung der Bewegungsgleichungen 52
4.1.2 Berührung und Trennung der Tropfen 57
4.1.3 Veranschaulichung der Transferreaktion 69

4.2 Erweiterung des Reibungsmodells um den Massentransfer 81
4.2.1 Das Reibungsmodell von Groß und Kalinowski 81
4.2.2 Bewegungsgleichungen, Anfangs- und

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548910_0021

Berührungsbedingungen 83
4.2.3 Die Reaktion Ar+Ni(280MeV) 86
4.2.4 Reaktionsraten in verschiedenen Systemen 95
4.2.5 Verbesserungsvorschläge 98

5. Rückblick 103

Anhang A: Zur Auswertung des Trägheitstensors 106

Anhang B: Grundsätzliches zur Mathematik des Tröpfchenstoßes 109

Literaturverzeichnis 111

Zusammenfassung

Diese Dissertation erläutert Untersuchungen zur Frage, ob Ladungs- und Massenaustausch in Schwerionenreaktionen kollektive Bewegungen sind.

Theoretische Grundlage ist die klassische Hydrodynamik. Mit ihr gelingt es, den Trägheitstensor für den Stoß zweier kugelförmiger Tropfen analytisch auszurechnen. Als Werkzeuge dienen die Stokessche Stromfunktion und Mehler-Fock-Transformationen. Der im Tensor enthaltene Trägheitsparameter des Austauschs wird unendlich, wenn die Tröpfchen außer Kontakt geraten, und gibt so das "Auftauen" und "Einfrieren" des Transfers wieder.

Der Trägheitstensor gestattet es, den Ablauf des Tröpfchenstoßes zu berechnen. Zur eindeutigen Bestimmung der Trajektorien werden die Randbedingungen der freien Oberfläche herangezogen. Eine geometrische Deutung der Hamiltonschen Gleichungen veranschaulicht die Trägheitseffekte. Die für tiefunelastische Prozesse charakteristischen Potentiale und Dissipationsterme werden dem Reibungsmodell entnommen.

Die Rechnungen unterstützen die Vermutung, daß kollektive Bewegungsformen sowohl den Ladungs- als auch den Massenaustausch maßgeblich beeinflussen. Beim Ladungsaustausch spricht dafür die Übereinstimmung von berechneten und experimentell abgeschätzten Relaxationszeiten; eine statistische Ladungsäquilibrierung würde viel mehr Zeit banspruchen. Die Vereinbarkeit zwischen kollektivem Austausch und Orbiting legt nahe, daß auch der Massentransfer im wesentlichen kollektiv verläuft.

1. Einführung

1.1 Fragestellung

Experimentelle Untersuchungen von Schwerionenreaktionen werden gewöhnlich nach der Masse der analysierten Teilchen in zwei Gruppen unterteilt: Einerseits werden Multiplizitäten, Energiespektren und Winkelverteilungen sehr leichter Partikeln gemessen, andererseits bestimmt man Energie, Ordnungszahl Z und Massenzahl A derjenigen Produkte, welche sich in Z und A von den Ausgangskernen nicht allzusehr unterscheiden [1]. Es sind hauptsächlich vier Phänomene aus der zweiten Gruppe, die besonderes Interesse gefunden haben:

α. Die kinetische Energie der Kerne geht beim Stoß zu einem großen Teil verloren. Dieser Energieverlust hängt in charakteristischer Form vom Streuwinkel Θ ab [2].

β. Zu jedem Streuwinkel gehören Energie- und Produktverteilungen, deren Breite mit zunehmendem Energieverlust wächst [3,4].

γ. Die Produktverteilungen verschieben ihren Schwerpunkt stetig mit dem Streuwinkel [5].

δ. Ordnungs- und Massenzahlverteilung sind eng miteinander korreliert [6].

Da das kollektive Modell der Kernphysik sowohl bei Rotationen, Vibrationen und Riesenresonanzen als auch in der Spaltungstheorie große Erfolge vorweisen kann [7,8,9], erhebt sich die Frage, ob auch die Schwerionenreaktionen zumindest teilweise kollektive Phänomene sind. Für den Punkt α. ist diese Frage bereits positiv beantwortet [10]. Doch ist die dabei allein entscheidende Relativbewegung zwischen den beiden Kernen ein verhältnismäßig einfaches kollektives Phänomen. Darüber hinaus haben Broglia und Mitarbeiter ein Modell entwickelt, das auch die Anregung von Oberflächen-

schwingungen einbezieht [11]. Sind aber auch der Massenaustausch γ. und die Ladungsäquilibrierung δ. kollektive Vorgänge? Die vorliegende Doktorarbeit soll diese Probleme anhand mechanischer Vorstellungen erörtern. Ein derartiges Modell gestattet allerdings nur die Berechnung von Verteilungsschwerpunkten. Messungen von Verteilungsbreiten wie in β. können damit vorerst nicht erklärt werden.

Eine Theorie der Ladungsäquilibrierung, insbesondere der Relaxationszeiten, scheint von anderer Seite noch nicht gegeben worden zu sein. Jedoch gibt es bereits Theorien des Massenaustauschs in tiefunelastischen Reaktionen, die Diffusionsmodelle, mit welchen sowohl Schwerpunkte als auch Breiten von Verteilungen ausgerechnet werden können. Diffusionsmodelle sind zuerst von Nörenberg [12] und Moretto [13] entwickelt worden. Sie sollen kurz geschildert und die Einführung eines kollektiven Modells gerechtfertigt werden.

1.2 Die Diffusionsmodelle

Nörenbergs Gedankengang verläuft folgendermaßen [12]: Es ist bekannt, daß sich einige der gemessenen Ladungsverteilungen $F(Z,\Theta)$ in der Form

$$F(Z,\Theta) = A(\Theta)\cdot \exp\left\{-\frac{[Z-Z_p-B(\Theta-\Theta_g)]^2}{C(\Theta-\Theta_g)}\right\} \qquad (1.1)$$

Z_p : Ordnungszahl des Projektils im Eingangskanal,

Θ_g : Grazing-Winkel,

B, C : Konstanten,

$A(\Theta)$: eine Funktion des Streuwinkels allein,

parametrisieren lassen. Indem Nörenberg diese Verteilung

auf Eins normiert und $\Theta-\Theta_g$ proportional zur Reaktionsdauer ansetzt, erzeugt er die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(Z,\tau)=\frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}}\cdot\exp\left\{-\frac{(Z-Z_p-v\tau)^2}{4D\tau}\right\} \tag{1.2}$$

v : konstante Driftgeschwindigkeit,

D : Diffusionskonstante,

die die Hauptlösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial P}{\partial \tau}=v\frac{\partial P}{\partial Z}+D\frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} \tag{1.3}$$

ist. Die Differentialgleichung (1.3) ist der Form nach eine Fokker-Planck-Gleichung, die die eindimensionale Diffusion beschreibt. Nörenberg schließt aus diesem Gedankengang, daß der Massenaustausch in tiefunelastischen Reaktionen ein Diffusionsprozeß ist.

Einige Fragen bleiben noch offen. Erstens läßt sich die Parametrisierung nur im extrem unelastischen Bereich anwenden [14]. Zweitens ist es unzulässig, vom Auftreten einer speziellen Funktion (1.2) auf die Gültigkeit einer partiellen Differentialgleichung (1.3) zu schließen. Drittens ist (1.3) nur formal eine Fokker-Planck-Gleichung. Damit (1.3) wirklich einen Diffusionsvorgang beschriebe, müßte Z durch eine Lagekoordinate längs der Verbindungslinie der beiden Kerne ersetzt werden.

Am dritten Punkt setzen die Arbeiten von De und anderen an [15]. Diese Autoren überlagern der Relativbewegung zufällige Nukleonensprünge zwischen den Kernen, beschreiben also einen wirklichen Diffusionsprozeß. Die Ergebnisse der Rechnungen für die Reaktion $^{136}Xe+^{209}Bi$ (1130MeV) ähneln den Messungen in vielen Zügen, doch stehen die theoretischen Resultate, was den Zusammenhang zwischen Energieverlust und Schwerpunkt der Ladungsverteilung angeht, im Widerspruch

zum Experiment.

Um den zweiten Punkt des vorletzten Absatzes klären zu können, haben Nörenberg und seine Mitarbeiter versucht, die Diffusionsgleichung (1.3) aus der Schrödingergleichung des Vielnukleonensystems abzuleiten. Dabei ist es ihnen gelungen, quantenmechanische Ausdrücke für v und D anzugeben [16, 17]. Der Vergleich mit gemessenen Daten ist aber schwierig, weil der Zusammenhang zwischen Massentransfer und Relativbewegung nicht genau genug bekannt ist.

Hofmann, Siemens und Ngô [18,19] sowie Agassi, Ko und Weidenmüller [20,21], in letzter Zeit aber auch Ayik und Nörenberg [22] haben deshalb Gleichungen abgeleitet, die den genannten Zusammenhang beschreiben sollen. Bedauerlicherweise scheinen diese Theorien fast nur auf fokussierende Reaktionen angewendet worden zu sein. Nur die Theorie von Agassi und anderen ist an der Orbiting-Reaktion $^{40}Ar + ^{232}Th$ (388 MeV) erprobt worden: Im Bereich der negativen Winkel ergeben sich viel zu kleine Werte für den Wirkungsquerschnitt [21].

Über die Abweichungen der Produktverteilungen von der Gaußschen Form (1.1) scheint es zur Zeit noch keine ausgearbeitete Theorie zu geben.

Moretto und seine Mitarbeiter haben etwa gleichzeitig mit Nörenberg die tiefunelastischen Reaktionen als Diffusionsprozesse gedeutet [13]. Sie führen Übergangswahrscheinlichkeiten dafür ein, daß ein Nukleon aus einem Kern in den anderen springt und bringen diese Übergangswahrscheinlichkeiten mit Liquid-Drop-Potentialen in Zusammenhang. Besonders hervorzuheben ist, daß Moretto und seine Mitarbeiter schon damals den entscheidenden Einfluß der Zentrifugalenergie auf die Nukleonendrift erkannt haben. Dieser Punkt ist auch im kollektiven Modell sehr wichtig (vgl. Abschnitt 4.1.3

und 4.2.3). Die Relativbewegung wird aber in die Theorie von Moretto und Sventek nur empirisch eingefügt [23].

Das kollektive Modell, das in dieser Arbeit entwickelt wird, könnte zur Beschreibung des Massentransfers in Schwerionenreaktionen auch dann nützlich sein, wenn sich die Diffusionstheorien der tiefunelastischen Reaktionen als uneingeschränkt richtig herausstellen sollten. Denn es berücksichtigt die Wechselwirkung zwischen Massentransfer und Relativbewegung unter Einschluß der Trägheitseffekte; Dämpfungen können problemlos eingeführt werden. Auf diese Weise kann das Modell zwischen den quasielastischen Reaktionen, in denen Trägheitseffekte eine wesentliche Rolle spielen, und den tiefunelastischen, wo, vorausgesetzt, die Diffusiontheorien gelten, die Dämpfung übermächtig ist, interpolieren.

Sollten sich aber die Diffusionstheorien als nicht ganz richtig erweisen, z.B. bei der Interpretation der Orbiting-Reaktionen, so stellt das kollektive Modell eine Alternative dar. Daß man ein solches klassisches Modell so erweitern kann, daß quantenmechanische Welleneffekte berücksichtigt und dadurch auch Verteilungsbreiten der Rechnung zugänglich werden, hat Hartmann für den transferfreien Fall gezeigt [24].

1.3 Programm

Warum wird in dieser Arbeit ein rein mechanisches Modell diskutiert? Z.B. wurden im kollektiven Modell der Kernvibrationen Trägheitsparameter und Oberflächenkräfte direkt aus Arbeiten von Rayleigh übernommen, so daß man sich sofort mit den quantenmechanisch bedingten Modifikationen dieser Größen befassen konnte [7]. Der Stoß zweier flüssiger Tröpfchen unter Einschluß des Materieaustauschs scheint dagegen noch

nicht einmal im Rahmen der klassischen Mechanik behandelt worden zu sein. Arbeiten sowohl von Meteorologen [25] als auch von Kernphysikern [26] klammern den Materietranfer aus, der, wie sich zeigen wird, erst nach der Überwindung einiger Schwierigkeiten einbezogen werden kann. Große Teile der vorliegenden Arbeit könnten daher auch in einem Aufsatz über Tropfenbildung in Wolken und Aerosolen stehen; es sollen hier aber ausschließlich Anwendungen auf Schwerionenreaktionen gegeben werden.

Zu den erwähnten Schwierigkeiten gehören vor allem die Berechnung der hydrodynamischen Trägheitsparameter und die Verhältnisse bei der Berührung der Tropfen.

Kapitel 2 ist ersten Abschätzungen der Trägheitsparameter und der Ladungsäquilibrierung (Punkt 1.1 δ.) gewidmet. Kapitel 3 enthält die hydrodynamisch exakte Berechnung der Trägheitsparameter. Im Kapitel 4 dienen sie zur Aufstellung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, die aber erst integriert werden können, nachdem die physikalisch richtigen Berührungsbedingungen gefunden sind. Die so etablierte Tröpfchendynamik wird auf den Massentransfer in Schwerionenstößen (Punkt 1.1 γ.) angewendet. Das Kapitel 5 faßt die Ergebnisse zusammen.

2. Ladungsäquilibrierung

2.1 Experimentelle Ergebnisse und ihre Deutung

Wie bereits im Punkt 1.1 6. erwähnt, sind in tiefunelastischen Reaktionen die Verteilungen von Isotopen und Isobaren miteinander korreliert. Dieser Sachverhalt ist bisher nur für einige Reaktionen [6,27] bestätigt worden. Er vereinfachte aber, gälte er allgemein, die experimentellen Untersuchungen des Massentransfers sehr. Denn die Verteilungen der Isotope können mit ΔE-E-Zählern leicht ausgemessen werden, während die Isobare erst durch Hinzunahme einer Flugzeitapparatur oder eines Massenspektrographen bestimmt werden können. Die folgenden Überlegungen stützen die Vermutung, daß diese Korrelation in allen tiefunelastischen Reaktionen auftritt.

Schon bei den meisten in der Natur vorkommenden Kernen hängen Ordnungs- und Massenzahl Z bzw. A eng zusammen. Denn die überwältigende Mehrheit aller Kerne findet sich in oder nahe der Talsohle der β-Stabilität. Diese Talsohle berechnet man, indem man die Energie des Kerntröpfchens $V_{LD}(A,Z)$ (LD: liquid droplet) bei festem A minimiert. Ganz analog haben Gatty und Mitarbeiter [6] das Minimum der Gesamtenergie

$$V = V_{LD}(A_T, Z_T) + V_{LD}(A_P, Z_P) + \frac{e^2 Z_T \cdot Z_P}{r_T + r_P} \qquad (2.1)$$

A_T, A_P : Massenzahlen von Target und Projektil,

Z_T, Z_P : Ordnungszahlen von Target und Projektil,

r_T, r_P : Radien von Target und Projektil,

für zwei sich berührende Kerne bestimmt. Hier sollen die Massen der beiden Kerne (A_T, A_P) einzeln und die Summe der Ladungen ($Z_T + Z_P$) erhalten bleiben. Die Talsohle der Stabili-

tät soll also nicht durch β-Umwandlung, sondern durch einen Protonen- mit entgegengesetztem Neutronenfluß erreicht werden[1]. Auf diese Deutung geht die Bezeichnung "Ladungsäquilibrierung" für den Effekt 1.1 δ. zurück. Die so berechnete Abhängigkeit zwischen der mittleren Massen- und der mittleren Ordnungszahl gibt die experimentellen Befunde befriedigend wieder.

Zuerst erscheint es paradox, daß zwei für sich vollkommen stabile Kerne instabil werden, sobald sie in Kontakt geraten. Diese Verständnisschwierigkeit löst sich aber, sobald man einsieht, daß erstens die Coulombwechselwirkung der Kerne $e^2 Z_T Z_P/(r_T+r_P)$ und zweitens die zusätzliche Nebenbedingung $Z_T+Z_P=\text{const.}$ eine Verschiebung der Ladungen erzwingen. Abbildung 1 illustriert diese Ladungsverschiebung: Die schweren Kerne, die allein gelassen deutlich mehr Neutronen als Protonen aushalten, können im Kontakt mit leichteren Kernen einige Protonen übernehmen. Abbildung 1 ist unter Verwendung von (2.1) zustande gekommen. In die Energien $V_{LD}(A_T,Z_T)$ und $V_{LD}(A_P,Z_P)$ sind die Asymmetrieenergien und die Coulombschen Selbstenergien eingeschlossen. Es ist also

$$V=\sum_{\nu=T,P}\left[\alpha_\nu\cdot(A_\nu-2Z_\nu)^2+\gamma_\nu Z_\nu^2\right]+\gamma Z_T Z_P+\text{const.}, \qquad (2.2)$$

$$\alpha_\nu := \frac{43{,}4}{A_\nu+5{,}62A_\nu^{2/3}}\,,\quad \gamma_\nu := \frac{0{,}864}{1{,}159}\cdot\frac{1}{A_\nu^{-1/3}}\,,\quad \gamma := \frac{5}{3}\cdot\frac{0{,}864}{1{,}159}\cdot\frac{1}{A_T^{1/3}+A_P^{1/3}}$$ [2]

Alle anderen Terme aus der Bethe-Weizsäcker-Formel können für die hier vorgenommenen Abschätzungen vernachlässigt werden. In (2.2) sind sie pauschal durch const. berücksichtigt.

---

[1] Lebensdauern gegenüber schnellen β-Übergängen betragen Sekunden, während tiefunelastische Reaktionen nach 10^{-20}s vorbei sind.

[2] Ein von Seeger optimierter Parametersatz wird benutzt [28, Tabelle 1, Satz 3].

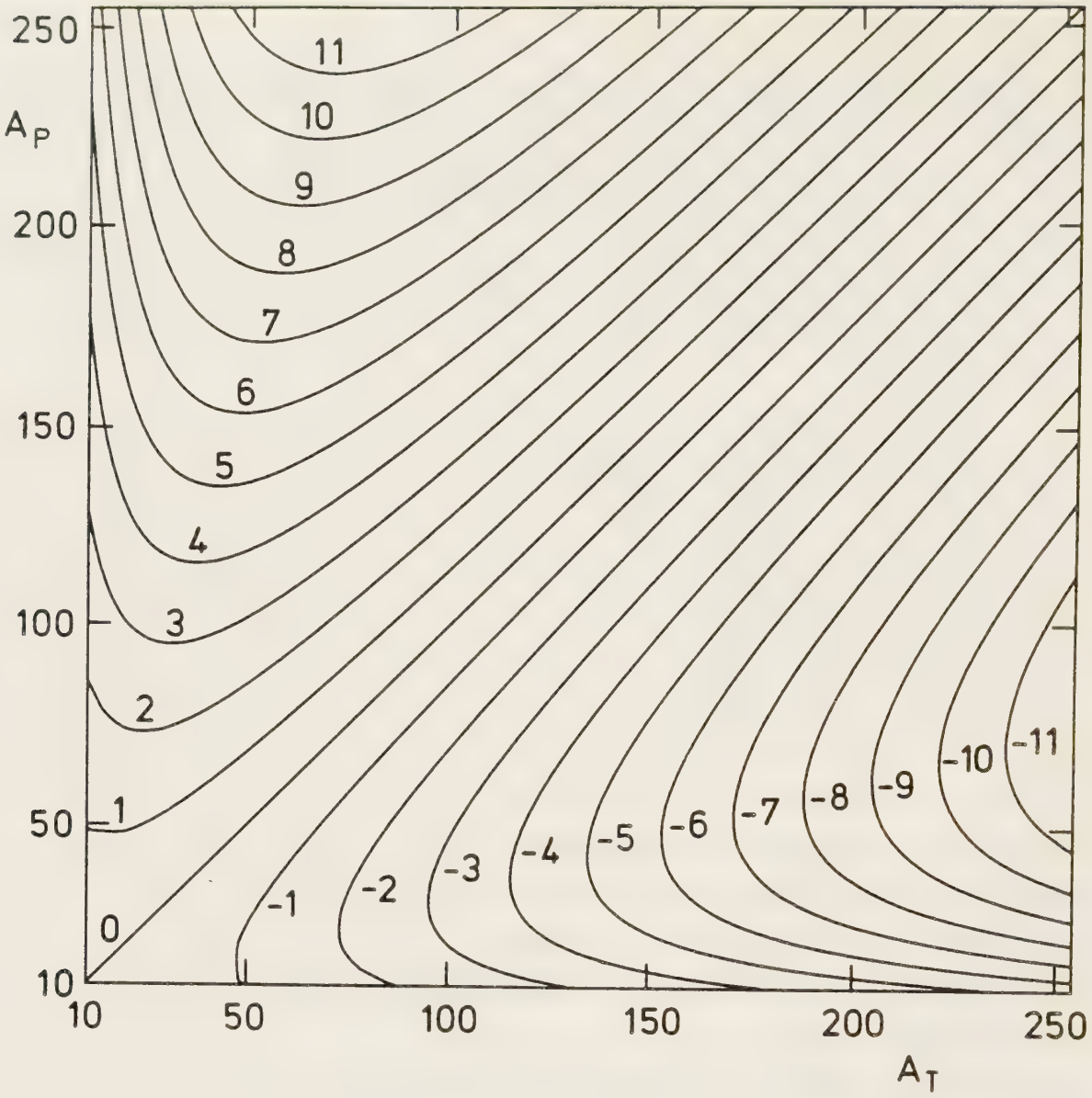


Abb. 1: Anzahl der vom Target ins Projektil transferierten Protonen in Abhängigkeit von den Massenzahlen A_T und A_P. Die Ausgangskerne stammen aus der Talsohle der β-Stabilität.

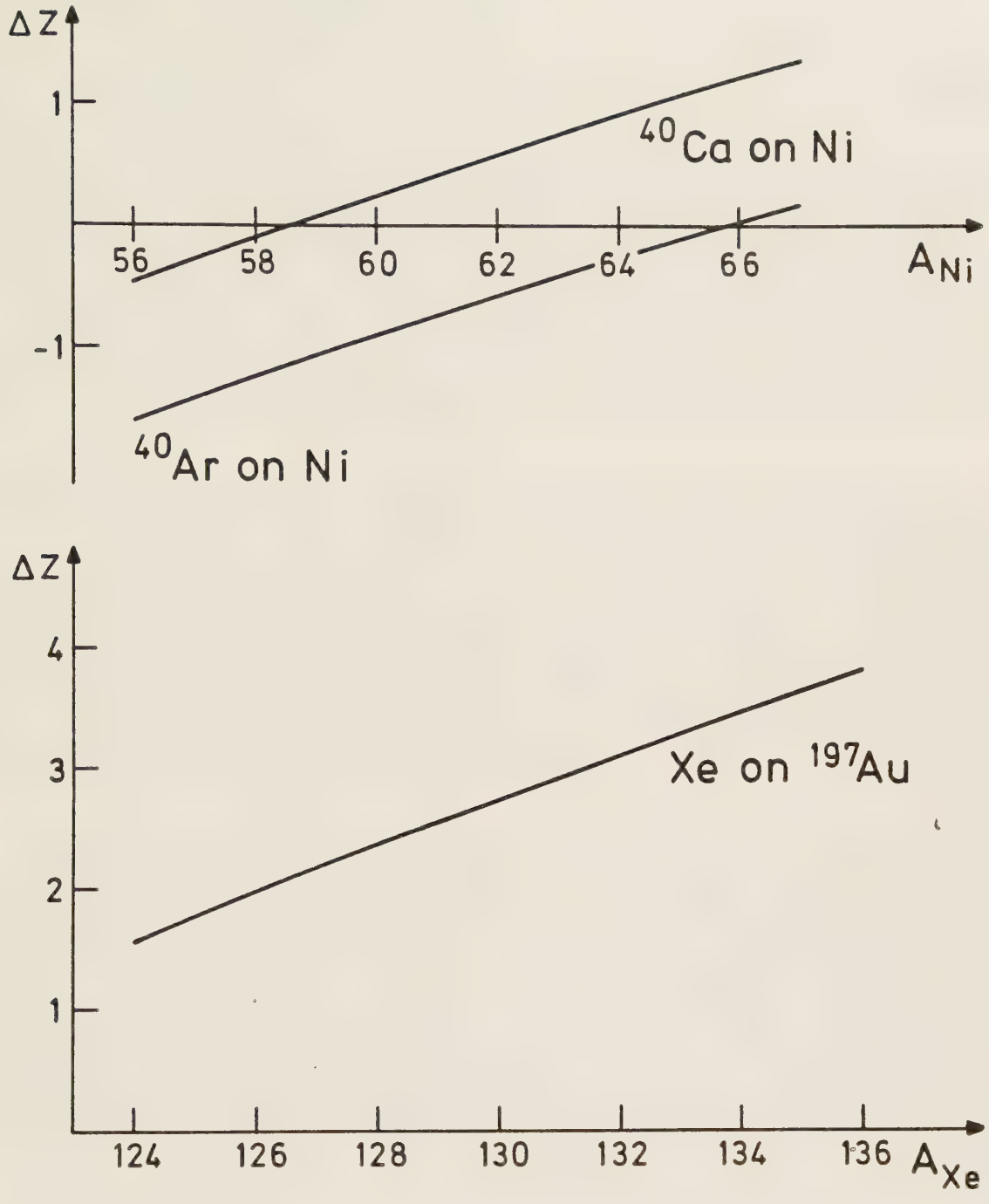


Abb. 2: Anzahl ΔZ der übertragenen Protonen für drei spezielle Reaktionen als Funktion der Massenzahl verschiedener Isotope.

Abbildung 1 bezweckt nur, einen Überblick über die Größe des Effekts für das gesamte Periodensystem zu geben. Bei speziellen Reaktionen ist es jedoch angebracht, die Ladungsverschiebungen für die Isotope im einzelnen zu berechnen. Abbildung 2 zeigt die Anzahl der transferierten Protonen für die bisher experimentell untersuchten Reaktionen. Bei ^{40}Ar+^{64}Ni (280 MeV) und ^{40}Ca+^{58,64}Ni (280 MeV) ist die Ladungsäquilibrierung entdeckt worden [6] . Später haben Kratz und seine Mitarbeiter diesen Effekt auch für die Reaktion Xe+^{197}Au (761 MeV) bestätigt [27]. Wie in Abbildung 1 sieht man auch hier, wieviel deutlicher der Ladungsaustausch bei Reaktionen mit einem sehr schweren Kern ist.

Gleichung (2.1) gestattet nur die Berechnung des Gleichgewichtszustands. (2.2) sagt weiterhin aus, daß die ins Gleichgewicht treibenden Kräfte in erster Linie aus der Asymmetrieenergie stammen und in zweiter Linie aus der elektrostatischen Wechselwirkung. Über die Geschwindigkeit des Ladungsausgleichs geben (2.1) oder (2.2) keine Auskunft. Messungen bei Streuwinkeln in der Umgebung des Grazing-Winkels haben gezeigt, daß die Ladungsäquilibrierung ein sehr schneller Prozeß sein muß: Dauert die ganze Reaktion etwa 10^{-21}s, so sollte der Ladungsausgleich nach ungefähr 10^{-22}s abgeschlossen sein. Krappe hat deshalb vorgeschlagen, den Ladungsausgleich nicht als einen Diffusionsprozeß, sondern als kollektive Bewegung analog zur Dipolriesenresonanz [29] aufzufassen. Die Dämpfung der Bewegung soll also nicht so stark sein, daß Trägheitseffekte vernachlässigt werden können. Der Prüfung dieser Hypothese ist der Rest dieses Kapitels gewidmet.

2.2 Erste Abschätzung des Trägheitsparameters κ

In einfachster Weise wird eine kollektive Bewegung durch klassische Bewegungsgleichungen beschrieben. Zu deren

Aufstellung benötigt man außer der potentiellen Energie V (2.1) auch die kinetische Energie

$$T = \frac{K}{2}\dot{a}^2. \tag{2.3}$$

Sie enthält neben der Geschwindigkeit der kollektiven Variablen a den Trägheitsparameter K. Aus T und V können mit Hilfe des Lagrange- oder Hamiltonformalismus die Bewegungsgleichungen abgeleitet werden. Im vorliegenden Fall wird eine einzige Schwingungsgleichung herauskommen. Aus der zugehörigen Schwingungsdauer läßt sich auf die Relaxationszeit des Ladungsausgleichs schließen.

Die geometrische Konfiguration, die der Berechnung der kinetischen Energie zugrunde liegt, soll anhand von Abbildung 3 erklärt werden: Zwei Kugeln überlappen einander so, daß eine Öffnung mit dem Radius c entsteht. Durch diesen Hals kann Materie strömen, Protonen in der einen, Neutronen in der entgegengesetzten Richtung, so, wie es die schematisch eingezeichneten Stromlinien andeuten.

Während des Materietransfers in Schwerionenreaktionen halten sich Zentrifugalkraft und Coulombabstoßung auf der einen sowie die Kernkraft auf der anderen Seite gerade die Waage. Der Halsradius c sollte daher während des Ladungsausgleichs näherungsweise konstant bleiben, so daß die einzigen dynamischen Variablen die Protonen- und die Neutronenzahl sind. Statt der Zahlen führt man Asymmetrien ein [30]

$$a_Z := \frac{Z_T - Z_P}{Z_T + Z_P} \quad , \quad a_N := \frac{N_T - N_P}{N_T + N_P} . \tag{2.4}$$

Gleichwertig damit ist eine Definition über die Volumina, die die Protonen bzw. Neutronen in Target und Projektil verdrängen

$$a_Z := \frac{V_T^Z - V_P^Z}{V_T^Z + V_P^Z} \quad , \quad a_N := \frac{V_T^N - V_P^N}{V_T^N + V_T^N} . \tag{2.5}$$

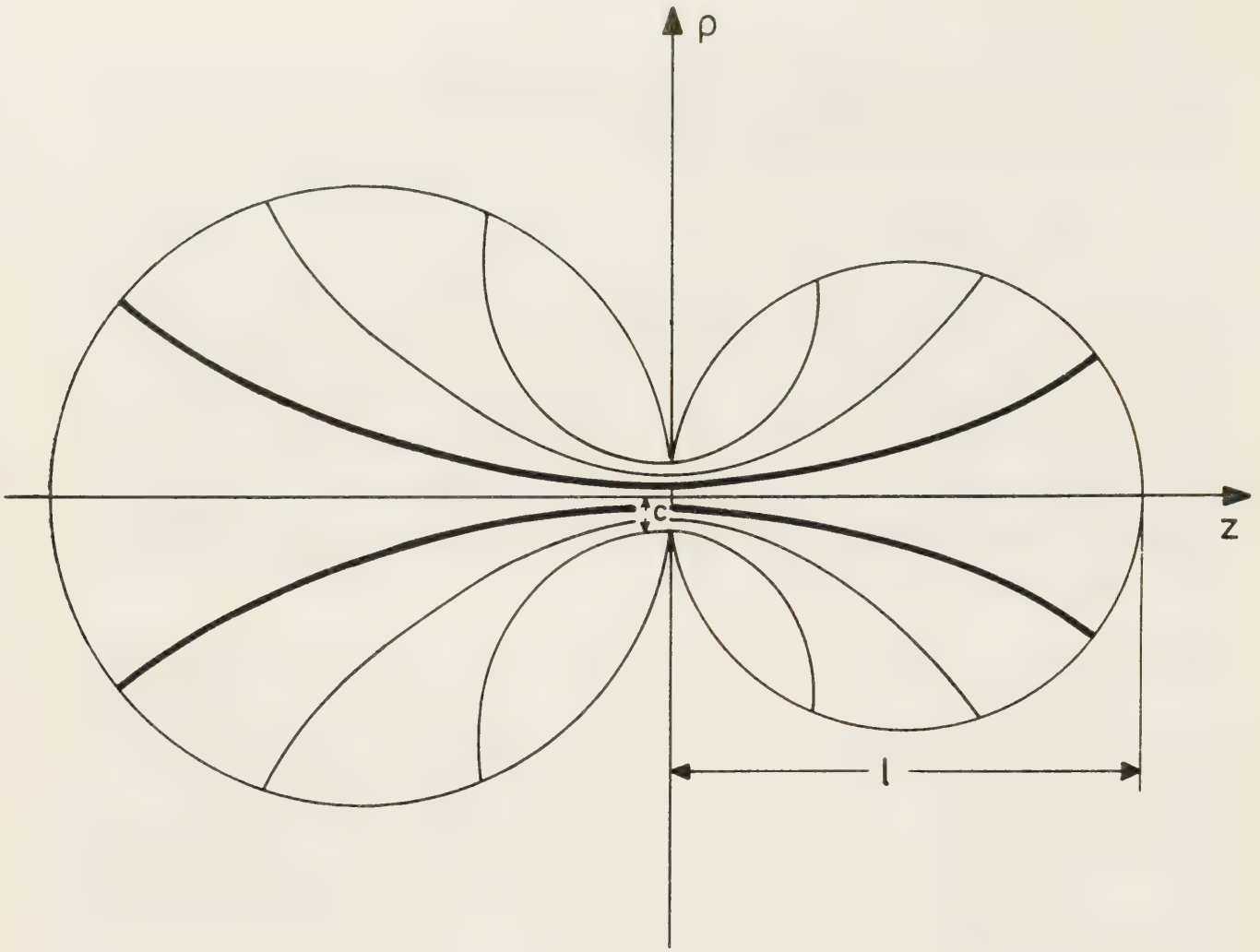


Abb. 3: Schematische Darstellung der Stromlinien für den Fluß zwischen zwei sich schwach überlappenden Kugeln. Dabei zieht sich die eine Kugel zusammen und bläht zugleich die andere auf.

Die durch den Hals pro Zeiteinheit strömenden Volumen $\dot{V}_Z$ und $\dot{V}_N$ sind demnach

$$\dot{V}_Z = \frac{V^Z}{2}\,\dot{a}_Z \qquad \dot{V}_N = \frac{V^N}{2}\,\dot{a}_N \,. \tag{2.6}$$

Die Gesamtvolumina $V^Z := V_T^Z + V_P^Z$ und $V^N := V_T^N + V_P^N$ bleiben dabei natürlich erhalten. Beim Ladungsausgleich ist $\dot{V}_Z = -\dot{V}_N$ und näherungsweise auch $\dot{a}_Z = -\dot{a}_N$. Deshalb und wegen $Z_T + N_T = A_T = \text{const.}$, $Z_P + N_P = A_P = \text{const.}$ reicht $a \equiv a_Z$ als Prozeßvariable aus.

In tiefunelastischen Reaktionen dürften die Kerne einander nur geringfügig überlappen. Der Halsradius c sollte also klein gegenüber den Abmessungen der Kerne, die in Abbildung 3 durch 1 charakterisiert sind, bleiben. Für diesen Grenzfall ist eine einfache Abschätzung des Trägheitsparameters κ möglich. Je kleiner c ist, desto mehr konzentriert sich die Strömung auf die Umgebung des Halses. Nur in dessen Nähe werden beträchtliche Strömungsgeschwindigkeiten $\underline{v}(\underline{r})$ erreicht. Zum Integral der kinetischen Energie

$$T = \frac{D}{2}\int \underline{v}^2(\underline{r})\, dV, \tag{2.7}$$

D : Dichte der Flüssigkeit,
dV: Volumenelement,

das über das Innere der beiden Kugeln zu erstrecken ist, trägt also merklich nur die Umgebung der Öffnung bei. In diesem Gebiet sieht die Strömung aber so aus, wie die Strömung durch ein kreisförmiges Loch in einer ebenen Wand. Das Geschwindigkeitspotential einer solchen Strömung ist bekannt, vorausgesetzt, man beschränkt sich auf rotationsfreie und inkompressible Flüssigkeiten [31]:

$$\Phi(\alpha) = \pm \frac{\dot{V}}{2\pi c}\arctan(\sinh\alpha), \qquad \begin{matrix} + \text{ für } z \geq 0, \\ - \text{ für } z \leq 0. \end{matrix} \tag{2.8}$$

Hier werden Ellipsoidkoordinaten (α,β) benutzt, die mit Zylinderkoordinaten (z,ϱ) über die Gleichungen

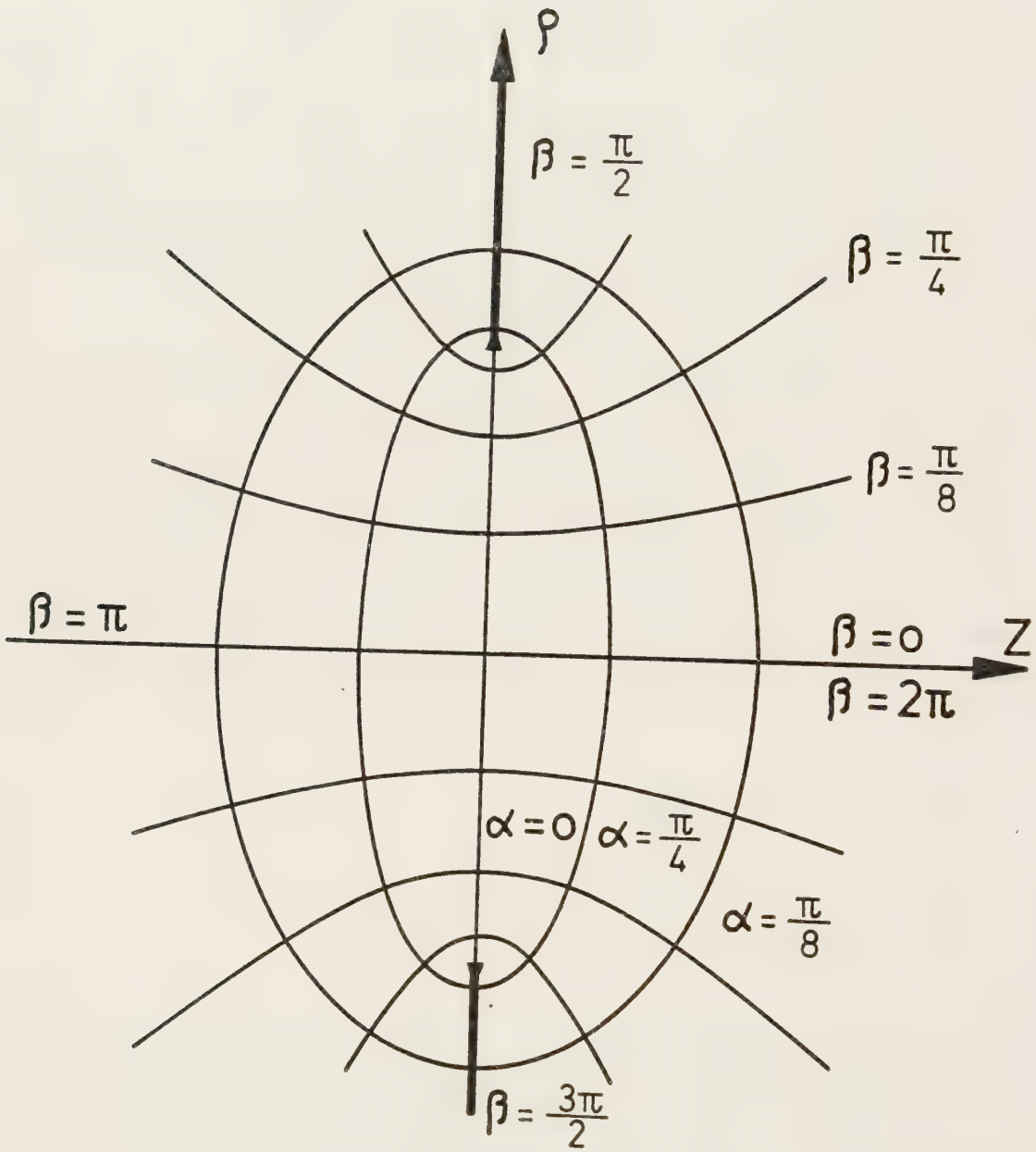


Abb. 4: Ellipsoidkoordinaten. Zugleich Darstellung einer idealen Strömung durch ein kreisförmiges Loch in einer ebenen Wand.

$$z = c \cdot \sinh\alpha \cdot \cos\beta, \quad \rho = c \cdot \cosh\alpha \cdot \sin\beta \tag{2.9}$$

zusammenhängen. Da das Geschwindigkeitspotential (2.8) in jedem Halbraum $z \gtrless 0$ nur von α abhängt, sind die in Abbildung 4 eingezeichneten Hyperbeln β=const. Stromlinien. $\dot{V}$ ist das pro Zeiteinheit transferierte Volumen.

Jetzt läßt sich wegen $\underline{v} = -\text{grad}\,\phi$ die kinetische Energie (2.7) ausrechnen. Es kommt

$$T = \frac{D}{4c}\dot{V}^2 \tag{2.10}$$

heraus. Je nachdem, ob es sich um Neutronen oder Protonen handelt, ist für $\dot{V}$ $\dot{V}_N$ oder $\dot{V}_Z$ einzusetzen. Wird $\dot{V}$ zugunsten der Asymmetriegeschwindigkeit $\dot{a}$ mittels (2.6) eliminiert, verwandelt sich die kinetische Energie (2.10) in

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{M \cdot V}{8c} \cdot \dot{a}^2 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot l_e^2 \cdot \frac{\pi}{6w} \cdot \dot{a}^2 . \tag{2.11}$$

In dieser Gleichung bedeutet $M = DV$ die Gesamtmasse der jeweiligen Nukleonensorte, und als Längeneinheit dient $l_e = \sqrt[3]{3V/(4\pi)}$, der Radius des "zugeordneten Compound-Kerns". Der Halsradius c ist durch die dimensionslose Halsweite $w = c/l_e$ ersetzt worden. Aus einem Vergleich von (2.11) mit (2.3) ergibt sich sofort die explizite Form des Trägheitsparameters

$$\varkappa = \frac{M \cdot V}{8c} = M \cdot l_e^2 \cdot \frac{\pi}{6w} . \tag{2.12}$$

An dieser einfachen Formel ist bemerkenswert, daß $\varkappa$ nach unendlich strebt, wenn c bzw. w nach Null geht. Die Asymmetrie muß ja unveränderlich sein, solange sich die Kerne nicht berühren. Aus (2.12) ist nun zu ersehen, daß der Asymmetriefreiheitsgrad a mit zunehmendem Kontakt (w wächst) allmählich "auftaut" und "einfriert", sobald die Kerne getrennt werden.

2.3 Zweite Abschätzung des Trägheitsparameters κ

Die Gleichung (2.12) ist für alles, was folgt, so wichtig, daß sie gar nicht gut genug abgesichert werden kann. Obwohl (2.12) im dritten Kapitel noch einmal, allerdings erst nach längerer Rechnung, abgeleitet werden wird, soll in diesem Abschnitt noch eine Abschätzung von Krappe erläutert werden. Diese Abschätzung liefert zwar nur $\kappa \propto 1/w$, aber gerade auf diesen Zusammenhang kommt es an. Darüber hinaus zeigen Krappes Überlegungen, daß die Gesetzmäßigkeit $\kappa \propto 1/w$ erhalten bleibt, auch wenn die Flüssigkeit etwas kompressibel ist und die Kernoberflächen sich ein wenig deformieren. Das zu wissen ist wichtig, weil die Kernmaterie sicherlich nur teilweise mit einer idealen Flüssigkeit vergleichbar ist. So zeigen Rechnungen von Kan [32] , daß die quantenmechanische Einteilchenbewegung nicht durch eine inkompressible Strömung dargestellt werden kann.

Man denke sich die Flüssigkeit innerhalb der beiden Kugeln in n Stromröhren unterteilt, durch die jeweils der gleiche Strom i fließt. Beispielsweise macht in Abbildung 3 der Raum zwischen den beiden dick ausgezeichneten Stromlinien eine solche Stromröhre aus. Die kinetische Energie t, die in einer Stromröhre steckt, ist

$$t = \frac{D}{2} \int_0^l v^2(z) \cdot q(z)\, dz, \qquad (2.13)$$

q(z): Querschnitt der Stromröhre an der Stelle z.

Die Integrationsgrenzen $0<z<1$ besagen, daß vorerst nur die rechte Kugel berücksichtigt wird. Wegen

$$i = D \cdot v(z) \cdot q(z) \qquad (2.14)$$

sind Querschnitt und Geschwindigkeit nicht unabhängig voneinander, so daß (2.13) die Form

$$t = \frac{i^2}{2D} \int_0^l \frac{dz}{q(z)} \qquad (2.15)$$

annimmt. Am Hals muß im Mittel $q(0)=\pi c^2/n$ sein, und auf der Kernoberfläche sollte $q(1)\propto 1^2/n$ größenordnungsmäßig stimmen. Diese Randwerte werden durch die Formel

$$q(z)=\frac{\pi}{n}(c^2+z^2) \tag{2.16}$$

interpoliert. Damit und mit (2.15) beweist man leicht, daß für $1\gg c$ die obere Grenze des Integrals nach Unendlich streben kann, ohne daß sich der Wert des Integrals wesentlich verändert. So findet man

$$t=\frac{(n\dot{i})^2}{2Dc}\cdot\frac{1}{2n}\cdot \tag{2.17}$$

$n\dot{i}=D\dot{V}$ ist der Gesamtstrom. Bei der Summation über die n Stromröhren und beide Kugeln hebt sich im Nenner der Faktor 2n heraus, so daß mit

$$T=2\cdot\sum_1^n t=\frac{D\cdot\dot{V}^2}{2c} \tag{2.18}$$

wieder Gleichung (2.10) und damit auch (2.12) entsteht, abgesehen vom Faktor 2.

Die Grundlagen dieser Abschätzung bilden (2.13), (2.14) und (2.16). In keine dieser Gleichung geht ein, daß die Kerne geometrisch exakte Kugeln sein müssen. Insbesondere erweist sich die unrealistische Scharfkantigkeit des Fensters (vgl. Abb. 3) als unwesentlich. Auch muß die Flüssigkeit nicht völlig inkompressibel sein. (2.13) und (2.14) können problemlos auf eine von z abhängige Dichte umgeschrieben werden. Wenn nur $D_<<D(z)<D_>$, $D_<$, $D_>=\text{const.}$, gewährleistet ist, zeigt man mit dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung, daß der Trägheitsparameter $\varkappa$ wie in (2.12) proportional zu 1/w sein muß. Allerdings gilt (2.14) für eine kompressible Flüssigkeit nur dann, wenn die Strömung stationär ist. Sonst kann Materie auch durch Druckwellen transportiert werden. Für kleine Kompressibilitäten aber dürfte dieser Effekt gering sein.

2.4 Relaxationszeit der Ladungsäquilibrierung

Der Trägheitsparameter (2.12) und das Potential (2.2) reichen aus, um die Bewegungsgleichungen des Ladungsaustauschs aufzustellen. Wir vereinbaren $\dot{a} := \dot{a}_Z \approx -\dot{a}_N$ und finden so die gesamte kinetische Energie[1]

$$T = \frac{K}{2}\dot{a}_Z^2 + \frac{K}{2}\dot{a}_N^2 \approx K\dot{a}^2. \qquad (2.19)$$

Wegen (2.4) sind in (2.2) Z_T und Z_p durch

$$Z_T = Z\frac{1+a}{2}, \quad Z_p = Z\frac{1-a}{2} \qquad (2.20)$$

zu eliminieren. Die potentielle Energie V wird dadurch zu einem Polynom zweiten Grades in a. Die erste Ableitung $\partial_a V$ verschwindet für den Gleichgewichtswert a_o, dessen Bedeutung schon im Abschnitt 2.1 diskutiert worden ist. Für die Bewegung um das Gleichgewicht liefert erst die zweite Ableitung

$$\partial_a^2 V = 2\cdot Z^2\cdot\left(\alpha_T+\alpha_p+\frac{\gamma_T+\gamma_p-\gamma}{4}\right) \approx 2\cdot Z^2\cdot(\alpha_T+\alpha_p) \qquad (2.21)$$

den wesentlichen Beitrag des Potentials. Die Differentialgleichung, die aus (2.19) und (2.21) folgt,

$$\frac{d^2(a-a_o)}{dt^2} = \frac{\partial_a^2 V}{2K}(a-a_o), \qquad (2.22)$$

beschreibt harmonische Schwingungen mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{\partial_a^2 V}{2K}} \approx 5\cdot\sqrt{c\,[\mathrm{fm}]\,(1/A_T+1/A_p)}\ \ [10^{22}\mathrm{s}^{-1}]. \qquad (2.23)$$

Dieser Ausdruck hängt noch vom Halsradius ab, aber nicht empfindlich. Für

$$c = 0{,}5\cdot(A_T\cdot A_p)^{1/6}\ [\mathrm{fm}] \qquad (2.24)$$

sind die aus (2.23) berechneten Zeiten $1/\omega$ in der Abbildung 5 als Höhenschichtliniendiagramm aufgetragen. Tatsächlich

[1] Schwerpunktskorrekturen wie im Kapitel 3 sind hier nicht erforderlich, da die zwei entgegengesetzten Ströme dafür sorgen, daß das (z,ρ)-Koordinatensystem (vgl. Abb.3) und das Schwerpunktsystem stets übereinstimmen.

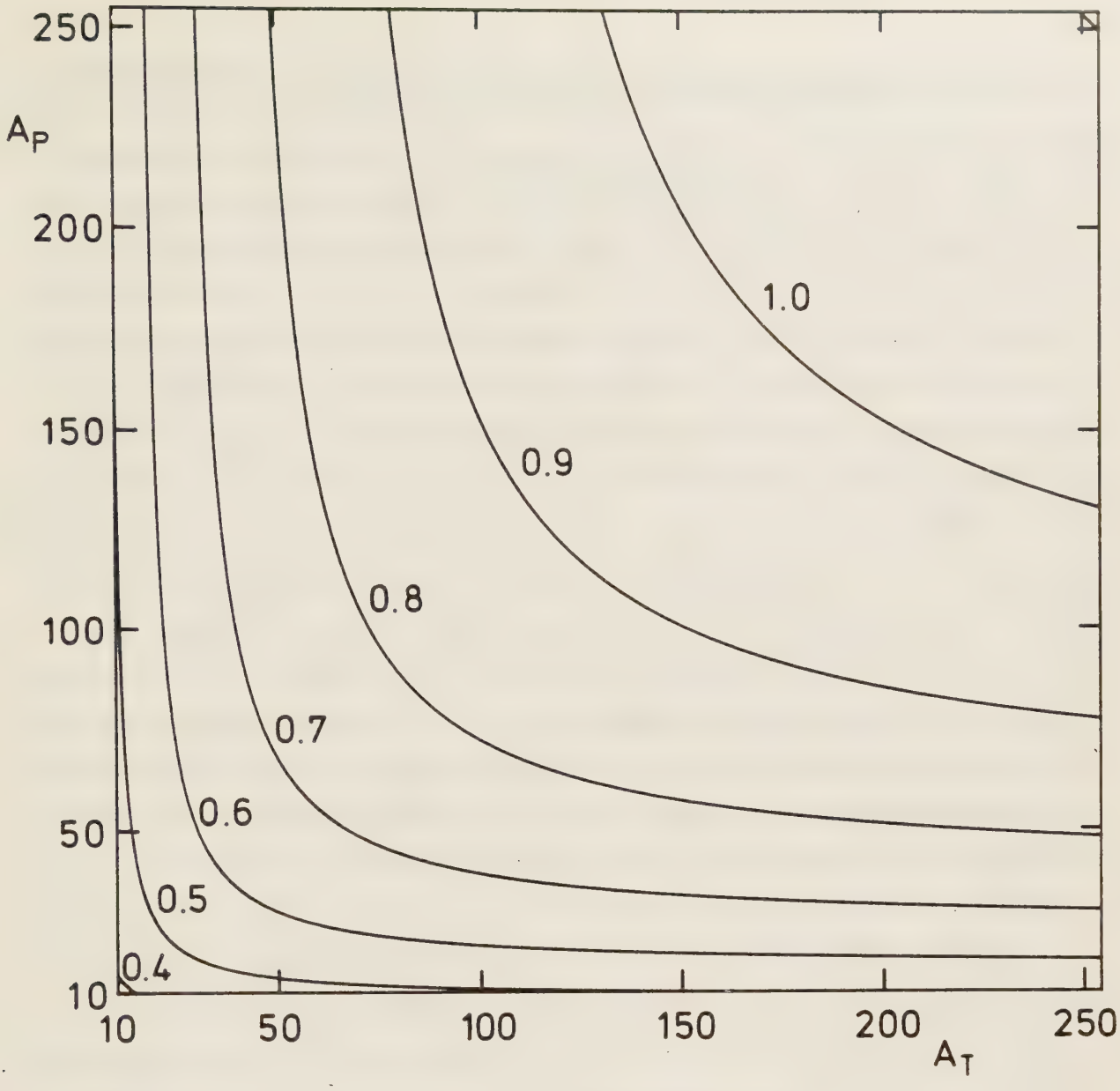


Abb. 5: Höhenschichtliniendiagramm der charakteristischen Zeiten $1/\omega$ des Ladungsausgleichs als Funktion der Massenzahlen von Target und Projektil. Zeiteinheit ist 10^{-22}s. Die Berechnung wurde nicht mit der Faustformel aus (2.23), sondern mit der genaueren Seegerschen Parametrisierung aus (2.2) ausgeführt.

sind die Schwingungen außerordentlich schnell; bis zum ersten Nulldurchgang vergehen etwa 10^{-22}s. Gegenüber der Dipolriesenresonanz ist der Vorgang zwar wegen des engen Halses träger, aber die größere Asymmetriekraft, die gleichmäßig in den Volumen beider Kerne wirkt, macht die größere Trägheit wett.

Der durch (2.24) parametrisierte Halsradius ist absichtlich groß, vielleicht zu groß gewählt worden. Kleinere Halsradien führen zu einer größeren Schwingungsdauer. Denselben Effekt ruft eine Ersetzung von κ durch ein größeres κ_{eff} in (2.23) hervor. Mit einer solchen Modifikation muß man rechnen, da die hydrodynamisch berechneten Trägheitsparameter meist zu klein für die Anwendungen in der Kernphysik sind[1] [33] . Auch folgt aus Kelvins Minimum-Theorem [34], daß die Trägheitsparameter der idealen Flüssigkeit nicht größer als die einer realen Flüssigkeit sein können. Doch würde eine Vergrößerung des Arguments unter der Wurzel von (2.23) um den Faktor 10 nur eine dreifache Verminderung der Kreisfrequenz bewirken, was gerade noch mit den Experimenten verträglich wäre.

Allerdings benötigt man zur Beschreibung der Ladungsäquilibrierung eine Relaxationszeit und keine Schwingungsdauer. Selbstverständlich müssen die Schwingungen des Ladungsaustauschs gedämpft werden, und diese Dämpfung kann ziemlich stark sein. So beträgt die Relaxationszeit im aperiodischen Grenzfall gerade $1/\omega$. Es ist aber ausgeschlossen, daß die Bewegung völlig von der Dämpfung beherrscht wird. Denn dazu wären Relaxationszeiten in der Größenordnung von 10^{-21}s erforderlich, was den Messungen widerspräche. Diese Ergebnisse unterstützen Krappes Vermutung, daß der Ladungsausgleich eine kollektive Bewegung ist, die erst verstanden werden kann, wenn Trägheitseffekte einbezogen werden.

---

[1] Vergleiche Abschnitt 4.2.5 .

3. Hydrodynamische Berechnung der Trägheitsparameter

Für die Theorie des Ladungsausgleichs im Kapitel 2 waren Abschätzungen ausreichend, da auch von experimenteller Seite bisher nur Abschätzungen vorliegen. Dagegen gibt es für den Massenaustausch bei Schwerionenreaktionen viele Präzisionsmessungen, von denen an dieser Stelle nur [1,3,4,5] genannt seien. Um solche Daten deuten zu können, muß zumindest der Zusammenhang zwischen Materietransfer und Relativbewegung geschlossen behandelt werden. Die kinetische Energie muß also

$$T=\frac{\kappa}{2}\dot{a}^2+\lambda\dot{a}\dot{r}+\frac{\mu}{2}\dot{r}^2+\frac{\hat{\mu}}{2}r^2\dot{\varphi}^2 \qquad (3.1)$$

(r,φ): Polarkoordinaten im Schwerpunktsystem,

die gegenüber (2.3) zusätzlichen Trägheitsparameter λ, μ und $\hat{\mu}$ enthalten[1]. Während μ und $\hat{\mu}$ in die gewöhnliche reduzierte Masse übergehen dürften, wenn sich die Kerne nur schwach berühren, ist über den Mischungsterm λ nichts bekannt und sein Einfluß auf die Trajektorienrechnungen von vornherein kaum abzuschätzen.

Deshalb sollen in diesem Kapitel κ, λ und μ für die verkürzte kinetische Energie

$$T=\frac{\kappa}{2}\dot{a}^2+\lambda\dot{a}\dot{r}+\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 \qquad (3.2)$$

hydrodynamisch berechnet werden. Dabei sei vorausgesetzt, daß die ideale Flüssigkeit in zwei Kugeln eingeschlossen ist, die sich beliebig stark überlappen können. Zur Berechnung der Trägheitsparameter könnte man die Werner-Wheeler-Approximation [35] oder ein von Hasse und Mitarbeitern entwickeltes Näherungsverfahren [36] heranziehen. Die dabei verursachten Fehler dürften aber schwer abzuschätzen sein. Glücklicherweise ist das Problem, das auf eine Randwertaufgabe hinausläuft, exakt lösbar. Wegen der Kugelgeometrie

---

[1] Kopplungsterme zwischen $\dot{\varphi}$ und $\dot{r}$ sowie $\dot{\varphi}$ und $\dot{a}$ werden fortgelassen, um die Drehimpulserhaltung zu gewährleisten.

sind dazu Toruskoordinaten besonders geeignet (Abschnitt 3.1). Jedoch zeigt es sich, daß die Neumannsche Randwertaufgabe für das Geschwindigkeitspotential in Toruskoordinaten analytisch nicht lösbar ist. Erst durch Verwendung der Stokesschen Stromfunktion können alle grundsätzlichen Schwierigkeiten ausgeräumt werden (Abschnitt 3.2). Mehler-Fock-Transformationen erleichtern die Lösung des speziellen Randwertproblems (Abschnitt 3.3). Aus der so gewonnenen Integraldarstellung der Stromfunktion können die kinetische Energie und damit die Trägheitsparameter κ, λ, μ durch eine Integration berechnet werden(Abschnitt 3.4, Einzelheiten bringt der Anhang A). Die soweit verwendeten Toruskoordinaten bilden kein Schwerpunktsystem. Daher müssen an den Trägheitsparametern Schwerpunktskorrekturen angebracht werden (Abschnitt 3.5). Bei schwacher Berührung der Kugeln gehen die allgemeinen Formeln in besonders einfache, asymptotisch korrekte Ausdrücke über. Dieser und andere Grenzfälle werden diskutiert, um die Richtigkeit der allgemeinen Formeln zu überprüfen (Abschnitt 3.6). Durch eine zusätzliche physikalische Betrachtung kann gezeigt werden , daß $\hat{\mu}$ aus (3.1) im erwähnten Grenzfall tatsächlich gleich der reduzierten Masse ist (Abschnitt 3.7).

3.1 Geometrie des Systems und Toruskoordinaten

Für das vorliegende Problem sind Toruskoordinaten [37, 38] besonders günstig, weil sie ein Kugelbüschel als Koordinatenflächen enthalten (vgl. Abb. 6). Die Schnittkurve aller Kugeln heißt Polarkreis. Die orthogonalen Koordinatenflächen sind Tori, die den Polarkreis umschließen, und ein Bündel von Ebenen, die sich in der Symmetrieachse des Koordinatensystems schneiden. Die Toruskoordinaten (η,ϑ) hängen mit Zylinderkoordinaten (z,ρ) über

$$z = w \cdot \Lambda^{-1} \cdot \sin\vartheta, \qquad \rho = w \cdot \Lambda^{-1} \cdot \sinh\eta, \qquad \Lambda := \cosh\eta - \cos\vartheta, \tag{3.3}$$

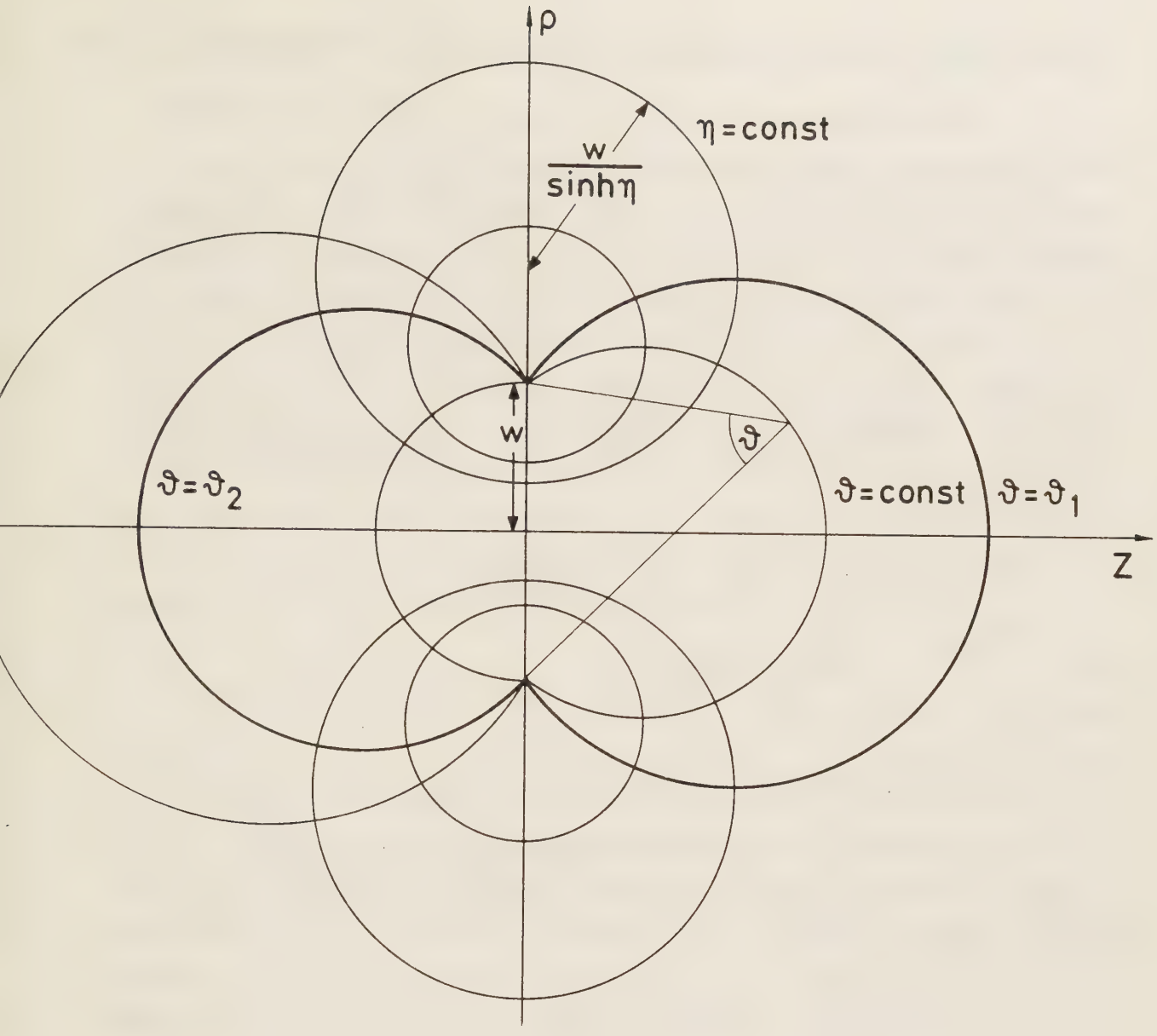


Abb. 6: Toruskoordinaten η, ϑ. Die stark ausgezogenen Linien markieren die Oberfläche des fusionierenden Systems.

zusammen. Der Azimut ist in beiden Koordinatensystemen gleich.

Die Oberfläche der fusionierenden Tropfen kann durch zwei Parameter charakterisiert werden: ϑ_1 für die rechte Kugelschale und ϑ_2 für die linke. Wegen der Erhaltung des Gesamtvolumens V muß die Halsweite w von ϑ_1 und ϑ_2 abhängen. Jedoch sind als Parameter für Anwendungen die Asymmetrie a und die Halsweite w brauchbarer. Man muß also ϑ_1 und ϑ_2 als Funktionen von a und w ermitteln. Dazu werden zuerst die Rauminhalte V_1 und V_2 der rechten und der linken Kugelschale aus Abbildung 6 berechnet. Mit elementarer Geometrie findet man:

$$V_1 = \frac{Vw^3}{4} \cdot f(\vartheta_1), \quad V_2 = -\frac{Vw^3}{4} f(\vartheta_2),$$
$$f(\vartheta) := \frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2} \cdot \left(3 + \cot^2\frac{\vartheta}{2}\right). \tag{3.4}$$

Zudem ist $V = V_1 + V_2$ und

$$a := \frac{V_1 - V_2}{V} \tag{3.5}$$

(vgl. (2.5)), woraus sofort V_1 und V_2 als Funktionen von a bestimmt werden können. Bis auf Faktoren, die sich herausheben, bedeutet das

$$f(\vartheta_1) = 2\,\frac{a+1}{w^3}, \quad f(\vartheta_2) = 2\,\frac{a-1}{w^3}. \tag{3.6}$$

Ein Vergleich mit (3.4) zeigt, daß es sich hier um Gleichungen dritten Grades in $\cot(\vartheta/2)$, $(\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2)$, handelt. Ihre Auflösung ist

$$\cot\frac{\vartheta}{2} = \left[\left(1+b^2\right)^{1/2} + b\right]^{1/3} + \left[\left(1+b^2\right) - b\right]^{1/3}$$
$$b := 2(a+1)/w^3 \text{ für } \vartheta = \vartheta_1, \quad b := 2(a-1)/w^3 \text{ für } \vartheta = \vartheta_2 \tag{3.7}$$

und ergibt die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 als Funktionen von a und w.

3.2 Ersetzung des Neumannschen Randwertproblems durch ein Dirichletsches

Um die kinetische Energie (2.7) berechnen zu können, benötigt man das Geschwindigkeitsfeld $\underline{v}$ der Flüssigkeit, und dies bestimmt man gewöhnlich aus dem Geschwindigkeitspotential Φ über $\underline{v}=-\text{grad}\Phi$. Zuerst muß also die Laplacegleichung $\Delta\Phi=0$ separiert werden. In Toruskoordinaten jedoch gelingt die Separation erst nach Abspaltung eines geeigneten Modulations- oder R-Faktors [39]. Genauer: Mit dem Ansatz $\Phi(\eta,\vartheta)=\Lambda^{1/2}\cdot\varphi(\eta,\vartheta)$ kommt eine Differentialgleichung für φ zustande, die separabel ist; doch hängt der Modulationsfaktor $\Lambda^{1/2}$ von η und ϑ ab (vgl. (3.3)). Durch Superposition der partikulären Lösungen erhält man [40]

$$\Phi(\eta,\vartheta)=\Lambda^{1/2}\int_0^\infty d\tau\cdot P_{i\tau-1/2}(\cosh\eta)\cdot\tilde{\Phi}(\tau,\vartheta), \tag{3.8}$$

$$\tilde{\Phi}(\tau,\vartheta):=\left(\sinh(\vartheta_2-\vartheta)\tau\cdot\hat{\Phi}_1(\tau)+\sinh(\vartheta-\vartheta_1)\tau\cdot\hat{\Phi}_2(\tau)\right)/\sinh(\vartheta_2-\vartheta_1)\tau\,.$$

$P_{i\tau-1/2}(\cosh\eta)$ ist eine Konusfunktion der Ordnung 0. Die Funktionen $\hat{\Phi}_1(\tau)$ und $\hat{\Phi}_2(\tau)$ müssen so eingerichtet werden, daß $\Phi(\eta,\vartheta)$ die vorgeschriebenen Werte auf den Rändern $\vartheta=\vartheta_1,\vartheta_2$ annimmt. Die Darstellung (3.8) ist allerdings nur für das Dirichletsche Randwertproblem brauchbar. Für das Neumannsche, um das es in der Hydrodynamik geht, versagt sie. Denn dabei müssen $\hat{\Phi}_1(\tau)$ und $\hat{\Phi}_2(\tau)$ aus den Normalableitungen von Φ auf den Rändern ermittelt werden. Und da die Normalableitung hier im wesentlichen eine Ableitung nach ϑ ist, stößt man auf sehr komplizierte Integralgleichungen

$$\begin{aligned}\partial_\vartheta\Phi(\eta,\vartheta)=&\left(\partial_\vartheta\Lambda^{1/2}\right)\int_0^\infty d\tau\cdot P_{i\tau-1/2}(\cosh\eta)\cdot\tilde{\Phi}(\tau,\vartheta)\\&+\Lambda^{1/2}\int_0^\infty d\tau\cdot P_{i\tau-1/2}(\cosh\eta)\cdot\left(\partial_\vartheta\tilde{\Phi}(\tau,\vartheta)\right),\quad\vartheta=\vartheta_1,\vartheta_2,\end{aligned} \tag{3.9}$$

deren Auflösung nach $\hat{\Phi}_1(\tau)$ und $\hat{\Phi}_2(\tau)$ auf analytischem Weg unmöglich erscheint. Der Modulationsfaktor $\Lambda^{1/2}$ verursacht diese Schwierigkeiten, die seit langer Zeit bekannt sind [41].

Und so begnügen sich Kurochkin und Cherdantsev [42] mit einer Näherungslösung der Integralgleichungen (3.9), bei der sie nur Asymmetrieveränderungen zulassen.

Diese Schwierigkeiten treten nur bei Neumannschen Randwertaufgaben auf. Dirichletsche Aufgaben können umstandslos gelöst werden, da bei ihnen Φ selbst auf den Rändern $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2$ vorgegeben ist. Damit ist auch $\Phi\Lambda^{-1/2}$ auf den Rändern bekannt. Wenn die Integraldarstellung (3.8) verwendet wird, erhält man zwei entkoppelte Integralgleichungen erster Art für $\hat{\Phi}_1(\tau)$ und $\hat{\Phi}_2(\tau)$. Diese Integralgleichungen können mit der Mehler-Fock-Transformation gelöst werden. Kommt also beim Separieren ein Modulationsfaktor vor, so ist es vorteilhaft, das Neumannsche Randwertproblem durch ein Dirichletsches zu ersetzen.

Um das zu erreichen, soll das Geschwindigkeitspotential gemieden und statt dessen Stokes´Stromfunktion herangezogen werden [43,44]. Diese Stromfunktion ist mit dem Geschwindigkeitsfeld durch ein Wegintegral verknüpft:

$$\Psi(s) := \int_{s_0}^{s} ds' \cdot \rho(s') \cdot v_n(s'). \tag{3.10}$$

Die Kurve C verbindet in der (z,ρ)-Ebene zwei Punkte, zu denen die Bogenlängen s_o und s gehören. Auf C seien Tangential- und Normalvektor rechtshändig angebracht. v_n ist dann die Normalkomponente von $\underline{v}$. Physikalisch bedeutet die Stromfunktion, abgesehen von einem Faktor 2π, den Fluß durch denjenigen Ring, welcher entsteht, wenn C um die Symmetrieachse rotiert.

Falls die Flüssigkeit inkompressibel ist, kann der Weg C zwischen den beiden Punkten beliebig verformt werden. Dann aber folgt aus (3.10):

$$\begin{aligned} v_z &= -\frac{1}{\rho}\partial_\rho \Psi, \\ v_\rho &= \frac{1}{\rho}\partial_z \Psi. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Damit erhält man die kinetische Energie T als Funktional der Stromfunktion

$$T = \frac{1}{2} \int dV \cdot \rho^{-2} \left((\partial_z \Psi)^2 + (\partial_\rho \Psi)^2 \right). \tag{3.12}$$

Zur Vereinfachung ist die Dichte D=1 gesetzt. Die Gleichungen (3.11) und (3.12) besagen, daß die Stromfunktion in axialsymmetrischen Problemen genauso viel ausgibt wie das Geschwindigkeitspotential.

Die Differentialgleichung der Stokesschen Stromfunktion, die nicht mit der Laplacegleichung übereinstimmt, kann auf zweierlei Weise abgeleitet werden: Entweder verwendet man die Gleichungen(3.11), die bereits die Inkompressibilität enthalten, und setzt sie in rot$\underline{v}$=0 ein, oder man benutzt das Dirichletsche Prinzip $\delta T=0$ für die kinetische Energie (3.12). Wenn ein kompliziertes Koordinatensystem vorliegt, ist die zweite Methode bequemer. Sie wird darum im nächsten Abschnitt für Toruskoordinaten angewendet. Ein Ergebnis soll aber vorweggenommen werden: Die Differentialgleichung für die Stromfunktion ist R-separabel. Aber anders als beim Geschwindigkeitspotential gehören zur Stromfunktion Randbedingungen Dirichletscher Art. Man entnimmt das der Integraldarstellung der Stromfunktion (3.10): Wenn der Weg C mit einem Meridian der Berandung zusammenfällt, kann die Stromfunktion aus den vorgegebenen Normalgeschwindigkeiten berechnet werden. Auf diese Weise wird ein Neumannsches Randwertproblem durch eine physikalisch äquivalente Dirichletsche Aufgabe ersetzt.

Das gerade beschriebene Verfahren ist nicht nur auf Toruskoordinaten anwendbar, sondern auf alle Zyklidkoordinaten [45]. Die erlauben besonders in der Umgebung des Halses eine anpassungsfähigere Beschreibung der Kernoberflächen. Doch führt die R-Separation der Differentialgleichung für die Stromfunktion im allgemeinen auf Laméfunktionen, deren Eigenschaften noch nicht ausreichend erforscht sind. Insbesondere kennt man keine allgemeinen Integraldarstellungen [46].

Es sollte erwähnt werden, daß stationäre Strömungsprobleme für viskose Flüssigkeiten mittels der Stromfunktion in Torus- und bisphärischen Koordinaten untersucht worden sind [47].

3.3 Auswertung der Stromfunktion

Die Stromfunktion für das vorliegende Problem wird in drei Etappen berechnet. Zuerst wird die Differentialgleichung der Stromfunktion in Toruskoordinaten aufgestellt und die allgemeine Lösung, die innerhalb der Kugelschalen beschränkt ist, angegeben. Darauf werden die Randwerte der Stromfunktion ausgerechnet, die einer infinitesimalen Veränderung der Asymmetrie a und der Halsweite w entsprechen. Zuletzt wird die allgemeine Lösung mit Hilfe von Mehler-Fock-Transformationen an die speziellen Randwerte angepaßt. Dabei kommen Mehler-Fock-Transformationen der Ordnung -1 vor, die direkt nicht zugänglich sind. Sie können aber in bekannte Transformationen der Ordnung 0 überführt werden.

3.3.1 Die Differentialgleichung der Stromfunktion

Wie bereits im Abschnitt 3.2 angedeutet, hat man, um die Differentialgleichung der Stromfunktion zu gewinnen, die kinetische Energie (3.12) auf Toruskoordinaten umzuschreiben:

$$T=\frac{1}{2w}\int_0^{\infty}d\eta\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi\ \mathrm{cosech}\eta\cdot\Lambda\cdot\left((\partial_\eta\Psi)^2+(\partial_\vartheta\Psi)^2\right). \qquad (3.13)$$

$\delta T=0$ ergibt sofort die Gleichung

$$\partial_\eta(\mathrm{cosech}\eta\cdot\Lambda\cdot\partial_\eta\Psi)+\partial_\vartheta(\mathrm{cosech}\eta\cdot\Lambda\cdot\partial_\vartheta\Psi)=0, \qquad (3.14)$$

die schon Sampson bekannt war [48]. Der Separationsansatz

$\Psi = \Lambda^{-1/2} \cdot H(\eta) \cdot \Theta(\vartheta)$ führt zu zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\Theta'' - \tau^2 \Theta = 0,$$

$$H'' - \coth\eta \cdot H' + (\tau^2 + 1/4) H = 0. \tag{3.15}$$

τ ist der Separationsparameter und $\Lambda^{-1/2}$ der Modulationsfaktor. Da die Lösungen für $0 \leq \eta < \infty$ endlich bleiben sollen, kann H nur diejenige Konusfunktion der Ordnung -1 sein, welche durch

$$H = \sinh\eta \cdot P^{-1}_{i\tau - 1/2}(\cosh\eta), \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{3.16}$$

definiert ist. Da die zugeordnete Legendrefunktion $P^{-1}_{i\tau-1/2}(\cosh\eta)$ bezüglich τ gerade ist, reichen nicht-negative Werte von τ bei der Superposition aus. Deshalb hat die allgemeine Lösung die Form

$$\Psi(\eta,\vartheta) = -\sinh\eta \cdot \Lambda^{-1/2} \int_0^\infty d\tau \cdot \tau \cdot \tanh\pi\tau \cdot P^{-1}_{i\tau-1/2}(\cosh\eta) \cdot \tilde{\Psi}(\tau,\vartheta),$$

$$\tilde{\Psi}(\tau,\vartheta) := \left(\sinh(\vartheta_2 - \vartheta)\tau \cdot \hat{\Psi}_1(\tau) + \sinh(\vartheta - \vartheta_1)\tau \cdot \hat{\Psi}_2(\tau)\right) / \sinh(\vartheta_2 - \vartheta_1)\tau, \tag{3.17}$$

analog zur Darstellung des Geschwindigkeitspotentials in (3.8). Die spezielle Konstruktion von $\tilde{\Psi}(\tau,\vartheta)$ bringt den Vorteil, daß sich $\tilde{\Psi}(\tau,\vartheta)$ für $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2$ auf $\hat{\Psi}_{1,2}(\tau)$ reduziert. Für die Randwerte auf $\vartheta = \vartheta_1$ ist also nur die Gewichtsfunktion $\hat{\Psi}_1(\tau)$ zuständig, und Entsprechendes gilt für $\vartheta = \vartheta_2$ und $\hat{\Psi}_2(\tau)$.

3.3.2 Die Randwerte

Ein Blick auf Abbildung **6** zeigt, daß infinitesimale Veränderungen der Winkel ϑ_1 und ϑ_2 sowie der Halsweite w die Grenzflächen verschieben. Somit gehört zu jedem Punkt auf den Flächen $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2$ ein infinitesimaler Verschiebungsvektor.

Diejenige Komponente, die senkrecht auf der Berandung steht, ist

$$v_n = -\dot{w}\sin\vartheta_i + (\dot{\vartheta}_i w - \dot{w}\cdot\sin\vartheta_i\cdot\cos\vartheta_i)\cdot\Lambda^{-1},\quad i=1,2\,. \tag{3.18}$$

Die infinitesimalen Größen sind bereits in Geschwindigkeiten überführt worden. v_n muß der Normalgeschwindigkeit der Flüssigkeit an der Grenzfläche gleich sein. Damit und mit (3.10) können die Randwerte der Stromfunktion ausgerechnet werden. Um die Normierung der Stromfunktion gemäß (3.17) aufrechtzuerhalten, daß nämlich auf der Symmetrieachse $\Psi=0$ sein soll, muß die Integration in (3.10) bei $\rho=\eta=0$ beginnen. So wird aus (3.18)

$$\begin{aligned}\Psi(\eta,\vartheta_i) = {} & \dot{w}w^2\cdot\sin\vartheta_i\cdot(\Lambda^{-1}-(1-\cos\vartheta_i)^{-1}) \\ & -(\dot{\vartheta}_i w^3 - \dot{w}w^2\cdot\sin\vartheta_i\cdot\cos\vartheta_i)(\Lambda^{-2}-(1-\cos\vartheta_i)^{-2})/2\,,\quad i=1,2.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Von den vier Variablen a, w, ϑ_1 und ϑ_2 sind nur zwei unabhängig. Um $\dot{\vartheta}_1$, $\dot{\vartheta}_2$ aus (3.19) zugunsten von $\dot{a}$ und $\dot{w}$ zu eliminieren, kann man (3.7) nach der Zeit differenzieren. Ein physikalisches Argument führt aber viel schneller zum Ziel: Bei einem Neumannschen Randwertproblem ist stets darauf zu achten, daß der Gesamtfluß durch die Berandung gleich Null sein muß; sonst gibt es keine Lösung. Die entsprechende Bedingung für die Stromfunktion lautet: Um die Stromerhaltung zu gewährleisten, muß die Stromfunktion stetig sein. Nun gibt $2\pi\Psi(\eta\to\infty,\vartheta)$ gerade den Gesamtstrom durch den Hals, und zwar darf ϑ dabei zwischen ϑ_1 und ϑ_2 variieren (vgl. Abb. 6). Also muß speziell $2\pi\Psi(\eta\to\infty,\vartheta_1)=2\pi\Psi(\eta\to\infty,\vartheta_2)$ sein. Andererseits folgt aus (3.5), daß der Gesamtstrom durch den Hals $V\dot{a}/2$ ist (vgl. (2.6)). So gewinnt man aus (3.19) die Verträglichkeitsrelationen

$$\dot{\vartheta}_i w^3 = \frac{2\dot{a}}{3}(1-\cos\vartheta_i)^2 + \dot{w}w^2\sin\vartheta_i(2-\cos\vartheta_i),\quad i=1,2, \tag{3.20}$$

die zur Elimination von $\dot{\vartheta}_1$, $\dot{\vartheta}_2$ aus (3.19) dienen:

$$\Psi(\eta,\vartheta_i) = \frac{\dot{a}}{3} + \dot{w}w^2\cdot\sin\vartheta_i\cdot\Lambda^{-1} - \left(\frac{\dot{a}}{3}(1-\cos\vartheta_i)^2 + \dot{w}w^2\cdot\sin\vartheta_i(1-\cos\vartheta_i)\right)\cdot\Lambda^{-2}. \tag{3.21}$$

Diese Randwerte ergeben in (3.17) eingesetzt Integralgleichungen für die Gewichtsfunktionen $\hat{\Psi}_1(\tau)$ und $\hat{\Psi}_2(\tau)$:

$$\Psi(\eta,\vartheta_i)=-\sinh\eta\cdot\Lambda^{-1/2}\int_0^\infty d\tau\cdot\tau\cdot\tanh\pi\tau\cdot P^{-1}_{i\tau-1/2}(\cosh\eta)\cdot\hat{\Psi}_i(\tau). \qquad (3.22)$$

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß man diese Gleichungen mit Hilfe von Mehler-Fock-Transformationen lösen kann.

3.3.3 Anwendung der Mehler-Fock-Transformation

Wenn die Mehler-Fock-Transformation der Ordnung m durch

$$\tilde{\mathcal{D}}_m[f(\eta);\tau]:=\int_0^\infty d\eta\cdot\sinh\eta\cdot P^{-m}_{i\tau-1/2}(\cosh\eta)\cdot f(\eta)=\hat{f}(\tau) \qquad (3.23)$$

definiert wird, lautet die Umkehrformel

$$\tilde{\mathcal{D}}^{-1}_m[\hat{f}(\tau);\eta]=(-)^m\int_0^\infty d\tau\cdot\tau\cdot\tanh\pi\tau\cdot P^{m}_{i\tau-1/2}(\cosh\eta)\hat{f}(\tau)=f(\eta). \qquad (3.24)$$

Hier werden die Bezeichnungen von Sneddon verwendet [49]. $f(\eta)$ und $\hat{f}(\tau)$ sollen Objekt- und Resultatfunktion heißen. Die Integralgleichungen (3.22) sind also inverse Mehler-Fock-Transformationen minus erster Ordnung:

$$\operatorname{cosech}\eta\cdot\Lambda^{1/2}\cdot\Psi(\eta,\vartheta_i)=\tilde{\mathcal{D}}^{-1}_{-1}[\hat{\Psi}_i(\tau);\eta],\quad i=1,2. \qquad (3.25)$$

Aufgelöst nach $\hat{\Psi}_i(\tau)$ bedeutet das wegen (3.23)

$$\hat{\Psi}_i(\tau)=\tilde{\mathcal{D}}_{-1}[\operatorname{cosech}\eta\cdot\Lambda^{1/2}\cdot\Psi(\eta,\vartheta_i);\tau]. \qquad (3.26)$$

Da Mehler-Fock-Transformationen lineare Operationen sind, kann $\hat{\Psi}_i(\tau)$ aus (3.26) und (3.21) berechnet werden, sobald Transformationen des Typs

$$\tilde{\mathcal{D}}_{-1}[\operatorname{cosech}\eta\cdot\Lambda^{-(n-1/2)};\tau],\quad n=0,1,2, \qquad (3.27)$$

ausgeführt werden können. Dabei hilft eine Relation, die Mehler-Fock-Transformationen minus erster Ordnung mit denen der Ordnung Null verbindet:

$$\tilde{\mathcal{F}}_0^{-1}[\hat{f}(\tau);\eta] = -\operatorname{cosech}\eta \cdot \partial_\eta \left(\sinh\eta \cdot \tilde{\mathcal{F}}_{-1}^{-1}[\hat{f}(\tau);\eta]\right). \tag{3.28}$$

Diese Gleichung folgt aus (3.24) und aus

$$P^{-1}_{i\tau-1/2}(\cosh\eta) = \operatorname{cosech}\eta \int_0^\eta d\eta' \cdot \sinh\eta' \cdot P_{i\tau-1/2}(\cosh\eta') \tag{3.29}$$

[50]. Also ist

$$\tilde{\mathcal{F}}_{-1}[\operatorname{cosech}\eta \cdot \Lambda^{-(n-1/2)};\tau] = (n-1/2)\cdot \tilde{\mathcal{F}}_0[\Lambda^{-(n+1/2)};\tau]. \tag{3.30}$$

Die Transformationen auf der rechten Seite sind in der Monographie von Sneddon angegeben [51]:

$$\tilde{\mathcal{F}}_0[\Lambda^{-(n+1/2)};\tau] = \frac{(-)^n 2^{n+1/2}}{(2n-1)!!} \cdot \frac{\operatorname{cosech}\pi\tau}{\tau} (\operatorname{cosec}\vartheta \cdot \partial_\vartheta)^n \cosh(\pi-\vartheta)\tau. \tag{3.31}$$

Damit können die Integralgleichungen (3.22) aufgelöst werden. Das Ergebnis ist:

$$\hat{\Psi}_i(\tau) = \frac{\operatorname{cosech}\pi\tau}{\tau} \sum_{\nu=0}^{2} \alpha_\nu(\vartheta_i) \cdot \partial_{\vartheta_i}^\nu \cosh(\pi-\vartheta_i)\tau\,, \quad i=1,2. \tag{3.32}$$

Die Koeffizienten sind dabei durch

$$\begin{aligned}
\alpha_0(\vartheta) &:= -\frac{\dot a}{3} 2^{-1/2}, \\
\alpha_1(\vartheta) &:= \left(\frac{\dot a}{3}\frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^2} + \dot w w^2 \frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right) 2^{1/2}, \\
\alpha_2(\vartheta) &:= -\left(\frac{\dot a}{3}\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta} + \dot w w^2 \frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right) 2^{3/2}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

definiert.

Die Stromfunktion, Gleichung (3.17), wird somit als inverse Mehler-Fock-Transformation dargestellt,

$$\Psi(\eta,\vartheta) = \sinh\eta \cdot \Lambda^{-1/2}\, \tilde{\mathcal{F}}_{-1}^{-1}[\tilde\Psi(\tau,\vartheta);\eta], \tag{3.34}$$

die linear in $\dot{a}$ und $\dot{w}$ ist. Die Resultatfunktion $\tilde{\Psi}(\tau,\vartheta)$ enthält $\hat{\Psi}_1(\tau)$ und $\hat{\Psi}_2(\tau)$, die aus (3.32) und (3.33) entnommen werden können.

3.4 Der Trägheitstensor

Da jetzt die Stromfunktion bekannt ist, kann die kinetische Energie (3.13) über eine dreifache Integration berechnet werden. Natürlich muß die Zahl der nicht trivialen Integrationen vermindert werden, zumal die Darstellung der Stromfunktion (3.34) selbst noch zwei Integrationen beinhaltet[1]. Hier hilft eine Formel weiter, die Milne-Thomson angibt [52]. Jedoch erfordern Anwendungen im Abschnitt 3.5 einen etwas allgemeineren Ausdruck, der sogleich abgeleitet werden soll.

Es sei eine "gemischte kinetische Energie T_{12}" als Verallgemeinerung von (3.12) eingeführt:

$$T_{12} := \frac{1}{2}\int dV\, \rho^{-2}\left(\partial_z\Psi_1\cdot\partial_z\Psi_2+\partial_\rho\Psi_1\cdot\partial_\rho\Psi_2\right). \tag{3.35}$$

Ψ_1 und Ψ_2 sollen Stromfunktionen sein. Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes und der Differentialgleichung der Stromfunktion erhält man , analog zur Rechnung bei Milne-Thomson, die gemischte kinetische Energie als ein einfaches Integral:

$$T_{12} = -\pi\int ds\cdot\rho^{-1}(s)\cdot\Psi_1(s)\cdot\partial_n\Psi_2(s). \tag{3.36}$$

Es muß längs eines vollständigen Meridians der Berandung integriert werden. n bezeichnet die innere Normale. (3.36) wird nun auf Toruskoordinaten umgeschrieben. Wir vereinbaren, daß die Integration auf der Schale $\vartheta=\vartheta_1$ begonnen werde. Dort weist die innere Normale in Richtung wachsenden Winkels ϑ. Umgekehrt ist es auf der Schale $\vartheta=\vartheta_2$. Daher bekommt die gemischte kinetische Energie die Form eines Zuwachses bezüglich ϑ:

---

[1] Vergleiche (3.24). Die Konusfunktion selbst muß durch ein Integral dargestellt werden.

$$T_{12}=\frac{\pi}{w}\int_0^\infty d\eta\cdot\operatorname{cosech}\eta\cdot\Lambda\cdot\Psi_1\cdot\partial_\vartheta\Psi_2\Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}. \tag{3.37}$$

Laut Definition (3.35) ist die gemischte kinetische Energie symmetrisch in Ψ_1 und Ψ_2. Man kann es sich also aussuchen, welche der beiden Stromfunktionen in (3.37) noch nach ϑ differenziert werden muß und von welcher die Randwerte allein genügen.

In diesem Abschnitt darf $\Psi_1=\Psi_2=\Psi$ gesetzt werden. $T_{12}=T$ ist dann die gewöhnliche kinetische Energie. Da sie in Ψ bilinear ist, sollte man prüfen, ob auf (3.37) die Parsevalsche Relation für Mehler-Fock-Transformationen anwendbar ist. Dadurch könnte man die zwei Integrationen sparen, welche die Darstellung der Stromfunktion in (3.34) ausmachen. Denn bei Benutzung einer Parseval-Relation reicht bereits die Kenntnis der Resultatfunktion $\tilde{\Psi}(\tau,\vartheta)$ aus; die Objektfunktion ist explizit nicht erforderlich. Die Parseval-Relation für Mehler-Fock-Transformationen der Ordnung -1 ist [49]:

$$\int_0^\infty d\eta\cdot\sinh\eta\cdot\tilde{\Phi}_{-1}^{-1}[\hat{f}_1(\tau);\eta]\cdot\tilde{\Phi}_{-1}^{-1}[\hat{f}_2(\tau);\eta]=\int_0^\infty d\tau\,\frac{\tau\cdot\tanh\pi\tau}{\tau^2+1/4}\cdot\hat{f}_1(\tau)\cdot\hat{f}_2(\tau). \tag{3.38}$$

Jedoch ist es unmöglich, diese Formel direkt anzuwenden, weil der Integrand in (3.37) nicht die Form hat, welche für die linke Seite von (3.38) benötigt wird. Doch kann (3.37) mit der Produktregel für Differentiation so umgeformt werden, daß sich die kinetische Energie in zwei Teile spaltet, $T=T_R+T_P$,

$$\begin{aligned} T_R &:= -\frac{\pi}{2w}\int_0^\infty d\eta\cdot\Psi^2\cdot\partial_\vartheta(\operatorname{cosech}\eta\cdot\Lambda)\Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}, \\ T_P &:= \frac{\pi}{2w}\int_0^\infty d\eta\cdot\partial_\vartheta(\operatorname{cosech}\eta\cdot\Lambda\cdot\Psi^2)\Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

T_R enthält nur die Randwerte der Stromfunktion (3.21) und kann somit elementar integriert werden; die Resultate sind

im Anhang A zu finden. Auf T_p aber kann die Parseval-Relation (3.38) angewendet werden:

$$T_p = \frac{2\pi}{w}\int_0^\infty d\tau\, \frac{\operatorname{cosech} 2\pi\tau}{\tau^2+1/4}\,\tau\cdot\sinh^2\pi\tau\cdot\tilde{\Psi}(\tau,\vartheta)\,\partial_\vartheta\tilde{\Psi}(\tau,\vartheta)\Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}. \qquad (3.40)$$

Da die Resultatfunktion $\tilde{\Psi}(\tau,\vartheta)$ von (3.17), (3.32) und (3.33) her bekannt ist, entsteht so eine Darstellung der kinetischen Energie durch elementare Funktionen und ein einfaches Integral. Um Spezialfälle leichter extrahieren zu können, und aus numerischen Gründen ist es günstig, (3.40) in einfachere Elemente zu zerlegen. Die Einzelheiten der Rechnung werden im Anhang erläutert.

Die kinetische Energie T, die in $\dot{a}$ und $\dot{w}$ bilinear ist, kann in der Form

$$2T = (\dot{a},\dot{w})\begin{pmatrix} m_{aa} & m_{aw} \\ m_{aw} & m_{ww}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{a}\\ \dot{w}\end{pmatrix} \qquad (3.41)$$

geschrieben werden, die den Trägheitstensor definiert. Dessen Komponenten, die Trägheitsparameter m_{aa}, m_{aw} und m_{ww}, sind durch die Summe von T_R und T_p bestimmt. Unter Verwendung der Ergebnisse des Anhangs findet man:

$$m_{aa} = \frac{\pi}{2w}\left(\left\{\frac{8\sin\vartheta\cos^3\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^4}\cdot\ln\frac{2}{1-\cos\vartheta} + \frac{24(\pi-\vartheta)\cos^3\vartheta + \sin\vartheta(8+34\cos\vartheta-10\cos^2\vartheta)}{3(1+\cos\vartheta)^3} - (8\ln 2-4)\cdot\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^2}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\right.$$

$$+\frac{6-8\ln 2}{(1+\cos\vartheta_1)(1+\cos\vartheta_2)}\left(\frac{(1-\cos\vartheta_1)\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2}{1+\cos\vartheta_2} - \frac{(1-\cos\vartheta_2)\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1}{1+\cos\vartheta_1}\right) \qquad (3.42)$$

$$\left.+16\left(\left\{\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^2}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\right)^2\cdot K_2(\vartheta_1,\vartheta_2) + 8\left\{\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\left\{\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^2}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\cdot K_3(\vartheta_1,\vartheta_2) + 4\left(\left\{\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\right)^2\cdot K_4(\vartheta_1,\vartheta_2)\right)$$

$$m_{aw} = \frac{\pi w}{3}\left(\left\{\frac{-4(1-\cos\vartheta)\cos\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^3}\ln\frac{2}{1-\cos\vartheta} - \frac{4(\pi-\vartheta)\sin\vartheta\cos\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^3} + \frac{12\ln 2 - 5 + 68\cos\vartheta + (1-12\ln 2)\cos^2\vartheta}{6(1+\cos\vartheta)^2}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\right.$$

$$- \frac{(3-4\ln 2)\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2}{(1+\cos\vartheta_1)(1+\cos\vartheta_2)}\left\{\frac{\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} - 8\left\{\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\left\{\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^2}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} K_2(\vartheta_1,\vartheta_2) \qquad (3.43)$$

$$\left. + \left(4\left\{\frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\left\{\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^2}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} - 2\left(\left\{\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\right)^2\right) K_3(\vartheta_1,\vartheta_2) + 4\left\{\frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\left\{\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} K_4(\vartheta_1,\vartheta_2)\right),$$

$$m_{ww} = \pi w^3\left(\left\{\frac{2\sin\vartheta(1-\cos\vartheta)}{(1+\cos\vartheta)^3}\ln\frac{2}{1-\cos\vartheta} + \frac{2(\pi-\vartheta)(1-\cos\vartheta)}{(1+\cos\vartheta)^2} - \frac{13-22\cos\vartheta+\cos^2\vartheta}{3\sin\vartheta(1+\cos\vartheta)}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\right. \qquad (3.44)$$

$$+ \frac{3-4\ln 2}{(1+\cos\vartheta_1)(1+\cos\vartheta_2)}\left((1-\cos\vartheta_1)\sin\vartheta_2 - (1-\cos\vartheta_2)\sin\vartheta_1\right) + 4\left(\left\{\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\right)^2 K_2(\vartheta_1,\vartheta_2)$$

$$\left. - 4\left\{\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\left\{\frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} K_3(\vartheta_1,\vartheta_2) + 4\left(\left\{\frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\right)^2 K_4(\vartheta_1,\vartheta_2)\right)$$

mit

$$K_2(\vartheta_1,\vartheta_2) := \int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{1+t^2}\,\frac{\sinh((\pi-\vartheta_1)t/2)\cdot\sinh((\pi-\vartheta_2)t/2)}{\sinh((\vartheta_2-\vartheta_1)t/2)\,\sinh(\pi t)}$$

$$K_3(\vartheta_1,\vartheta_2) := \int_0^\infty \frac{t^3\,dt}{1+t^2}\,\frac{\sinh((\pi-\vartheta_1)t/2)\cosh((\pi-\vartheta_2)t/2)+\sinh((\pi-\vartheta_2)t/2)\cosh((\pi-\vartheta_1)t/2)}{\sinh((\vartheta_2-\vartheta_1)t/2)\sinh(\pi t)} \qquad (3.45)$$

$$K_4(\vartheta_1,\vartheta_2) := \int_0^\infty \frac{t^4\,dt}{1+t^2}\,\frac{\cosh((\pi-\vartheta_1)t/2)\cdot\cosh((\pi-\vartheta_2)t/2)}{\sinh((\vartheta_2-\vartheta_1)t/2)\sinh(\pi t)}$$

Für vorgegebene Asymmetrie a und Halsweite w können die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 mit (3.7) berechnet werden.

Die Integrale K_2, K_3, K_4 sind höhere transzendente Funktionen der Variablen ϑ_1 und ϑ_2, die mit Hilfe des Clausen-Integrals dargestellt werden können, falls $\vartheta_2 - \vartheta_1$ ein rationaler Bruch von π ist [53]. Im Gegensatz zum ursprünglichen Integral in (3.40), das für $w \to 0$, d.h. für $\vartheta_1 \to 0$,

$\vartheta_2 \to 2\pi$, singulär wird, konvergieren die Integrale (3.45) gleichmäßig im gesamten Bereich von ϑ_1, ϑ_2-Werten, auf den es physikalisch ankommt[1]. Zur Auswertung dieser Integrale wurden Gauß-Laguerre-Quadraturen mit dreißig Stützstellen ausgeführt. Die Singularitäten werden in (3.42) bis (3.44) durch elementare Funktionen wiedergegeben.

Die Abbildungen 7, 8 und 9 veranschaulichen die Gleichungen (3.42), (3.43) und (3.44) im Gebiet $a \geq 0$, $w \leq 1$. Zwar sind die Gleichungen auch für $w > 1$ gültig, doch entspricht dem ein linsenförmiges Gebilde, das für Anwendungen in der Kernphysik nicht wichtig ist.

Einige Grundzüge der Abbildungen 7 bis 9 lassen sich unmittelbar physikalisch verstehen. Dabei dürfen die Trägheitsparameter m_{aa} und m_{ww} einzeln betrachtet werden, da m_{aa} die gesamte kinetische Energie ausmacht, wenn $\dot{w}=0$ ist; Entsprechendes gilt für m_{ww}, falls $\dot{a}$ verschwindet. Daraus folgt, daß m_{aa} und m_{ww} positiv und bezüglich der Variablen a symmetrisch sein müssen.

Zunächst der Trägheitsparameter m_{aa}: Seine auffälligste Eigenschaft ist die Divergenz für $w \to 0$ (vgl. (3.42)). Ein Blick auf Abbildung 6 verrät den Grund für dieses Verhalten: Wenn bei einer sehr kleinen Halsweite w eine bestimmte Asymmetriegeschwindigkeit aufrechterhalten werden soll, müssen die Strömungsgeschwindigkeiten in der Nähe des Halses und darum auch die kinetische Energie sehr groß werden. Fordert man umgekehrt, daß die Energie der Tröpfchen beschränkt sei, regelt die Singularität das "Auftauen" und "Einfrieren" des Asymmetriefreiheitsgrades, ein Effekt, der schon am Ende des Abschnitts 2.2 beschrieben worden ist[2]. Ebenfalls im Abschnitt 2.2 ist der "Konzentrationseffekt" zur Sprache gekommen, daß sich nämlich die lokale kinetische Energie $D \cdot \underline{v}^2(\underline{r})/2$ um so schärfer auf die Umgebung des Halses konzentriert, je kleiner w wird. Aus diesem Konzentrations-

---

[1] $\vartheta_1 \leq \pi/2 < 3\pi/2 \leq \vartheta_2$.

[2] Der Nachweis, daß $m_{aa} \sim \kappa$ $(w \to 0)$, wird im Abschnitt 3.6 nachgetragen.

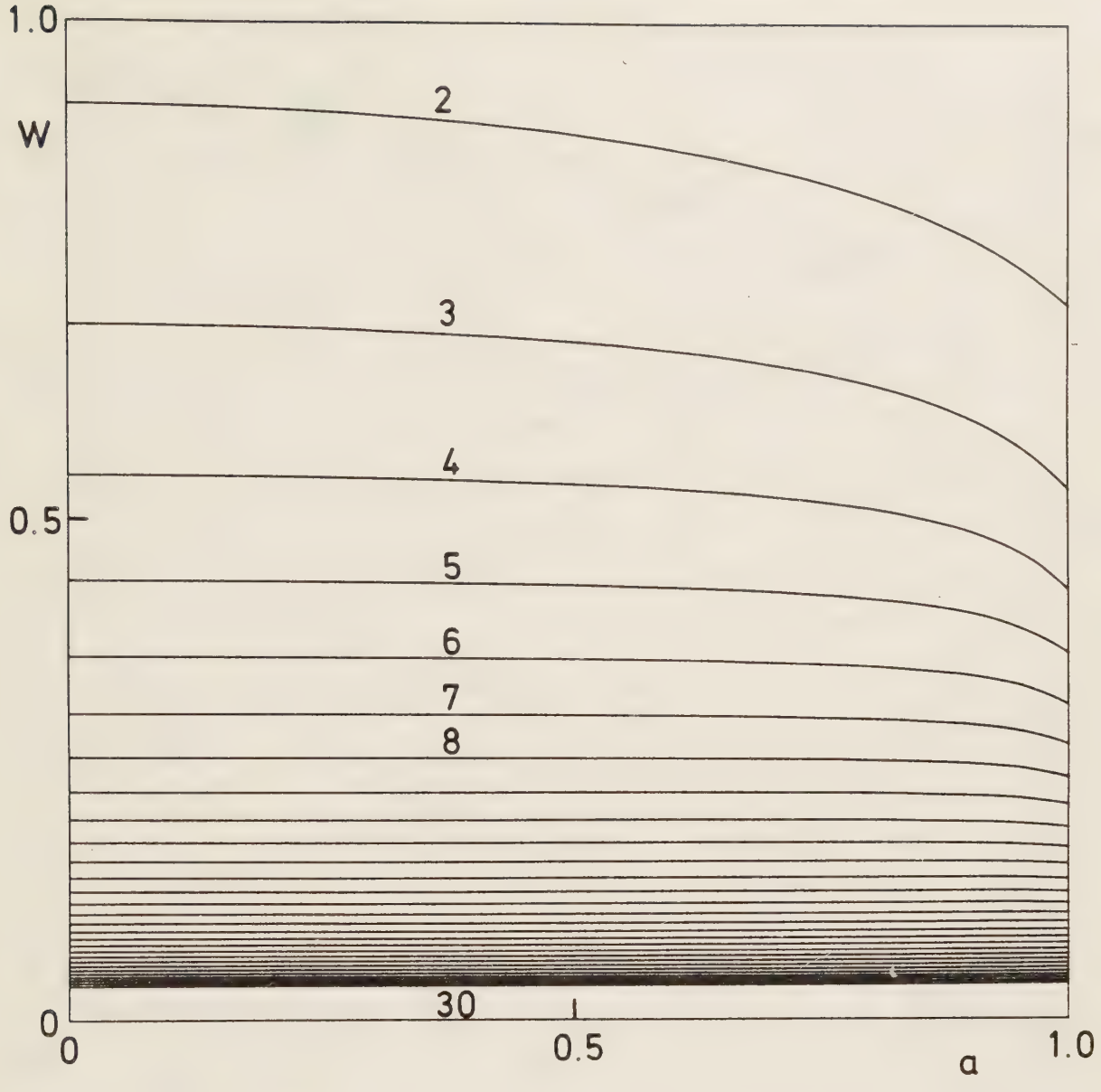
effekt folgt, daß m_{aa} für $w \to 0$ unabhängig von a ist; denn eine große Änderung der Asymmetrie erzeugt nur eine kleine Änderung der Grenzflächen in der Nähe des Halses.

Anders als m_{aa} verschwindet m_{ww} für $w \to 0$ (vgl. (3.44)). Auch das kann mit Hilfe der Abbildung 6 verstanden werden: Für zwei sich schwach berührende Kugeln sind nur kleine Verschiebungen der Flüssigkeit notwendig, um die Halsweite beträchtlich zu vergrößern. So wird beim Beginn eines Stoßes zwischen zwei Tröpfchen sehr schnell ein Fenster aufgerissen, wogegen der Materieaustausch verhältnismäßig langsam in Gang kommt. Interessanterweise erreicht m_{ww} sein Maximum nicht für w=1, d.h. für die einfach sphärische Gestalt, sondern für einen Wert von w, der geringfügig kleiner ist.

Der Trägheitsparameter m_{aw} beschreibt die Kopplung zwischen den Freiheitsgraden a und w, die auf Trägheitseffekten beruht. Aus Abbildung 8 ist zu entnehmen, daß $m_{aw}=0$ für a=0 und w=0. Das kann folgendermaßen verstanden werden: (i) a=0. Die kinetische Energie ist unter Vorzeichenwechsel von a invariant. Da der Kopplungsterm $m_{aw}\dot{a}\dot{w}$ die Asymmetriegeschwindigkeit $\dot{a}$ nur linear enthält, muß m_{aw} antisymmetrisch in a sein und somit für a=0 verschwinden: $m_{aw}(0,a)=0$. (ii) w=0. Wegen des oben erwähnten Konzentrationseffekts folgt aus $m_{aw}(0,0)$ für alle a $m_{aw}(a,0)=0$.

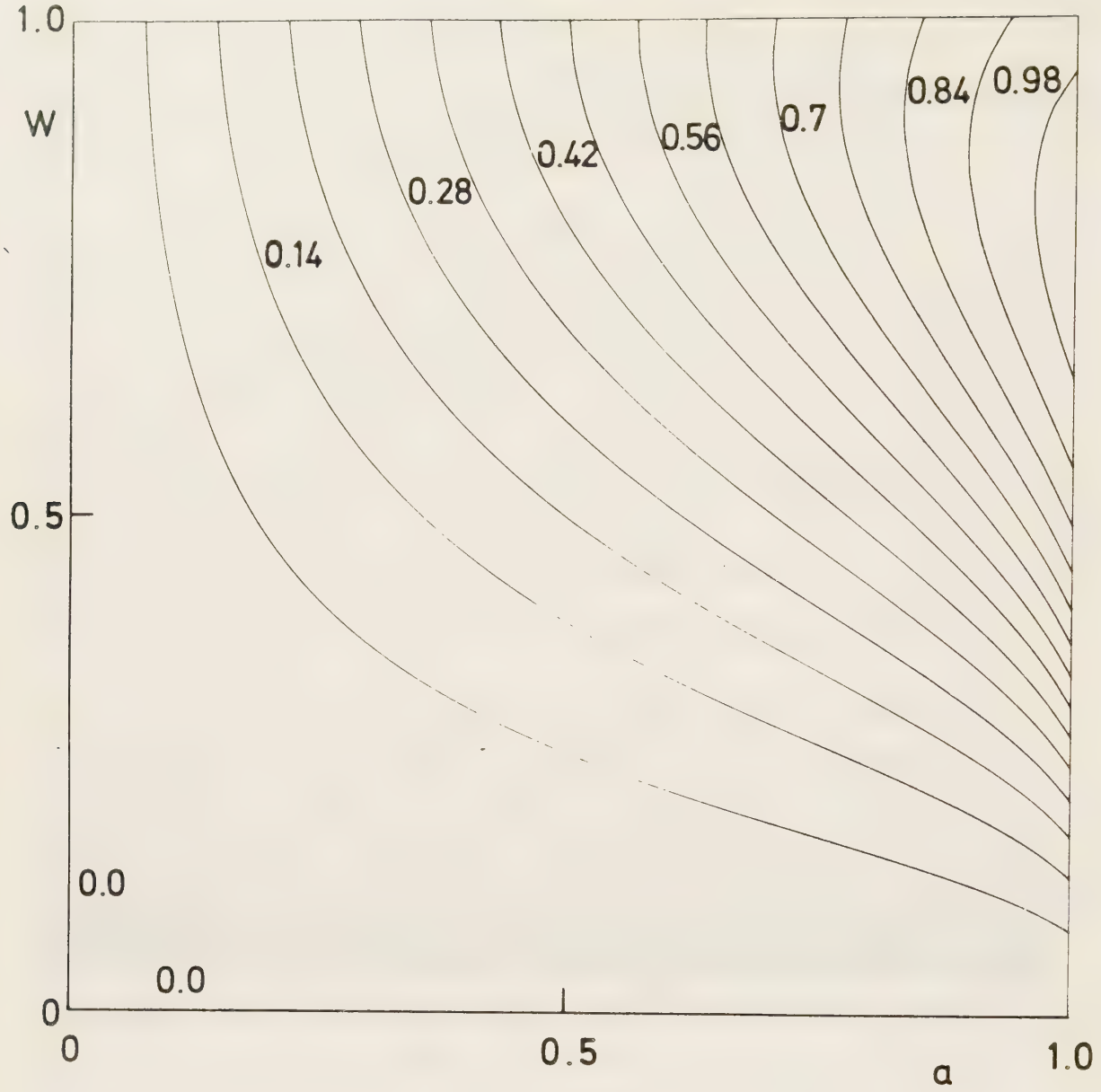
Die dynamische Bedeutung der verwandten Trägheitsparameter u_κ, u_λ und u_μ wird im Abschnitt 4.1.3 mit Hilfe der Impulsflächen erörtert.

Alle Ergebnisse dieses Abschnitts wurden in dimensionsloser Form angegeben: die Längen in Einheiten des Radius des zugehörigen Compoundkerns $l_e=\sqrt[3]{3V/(4\pi)}$, und die Massendichte D ist gleich eins gesetzt. Um die Trägheitsparameter in physikalischen Einheiten zu erhalten, hat man sie mit dem Faktor $D\cdot l_e^5$ zu multiplizieren.



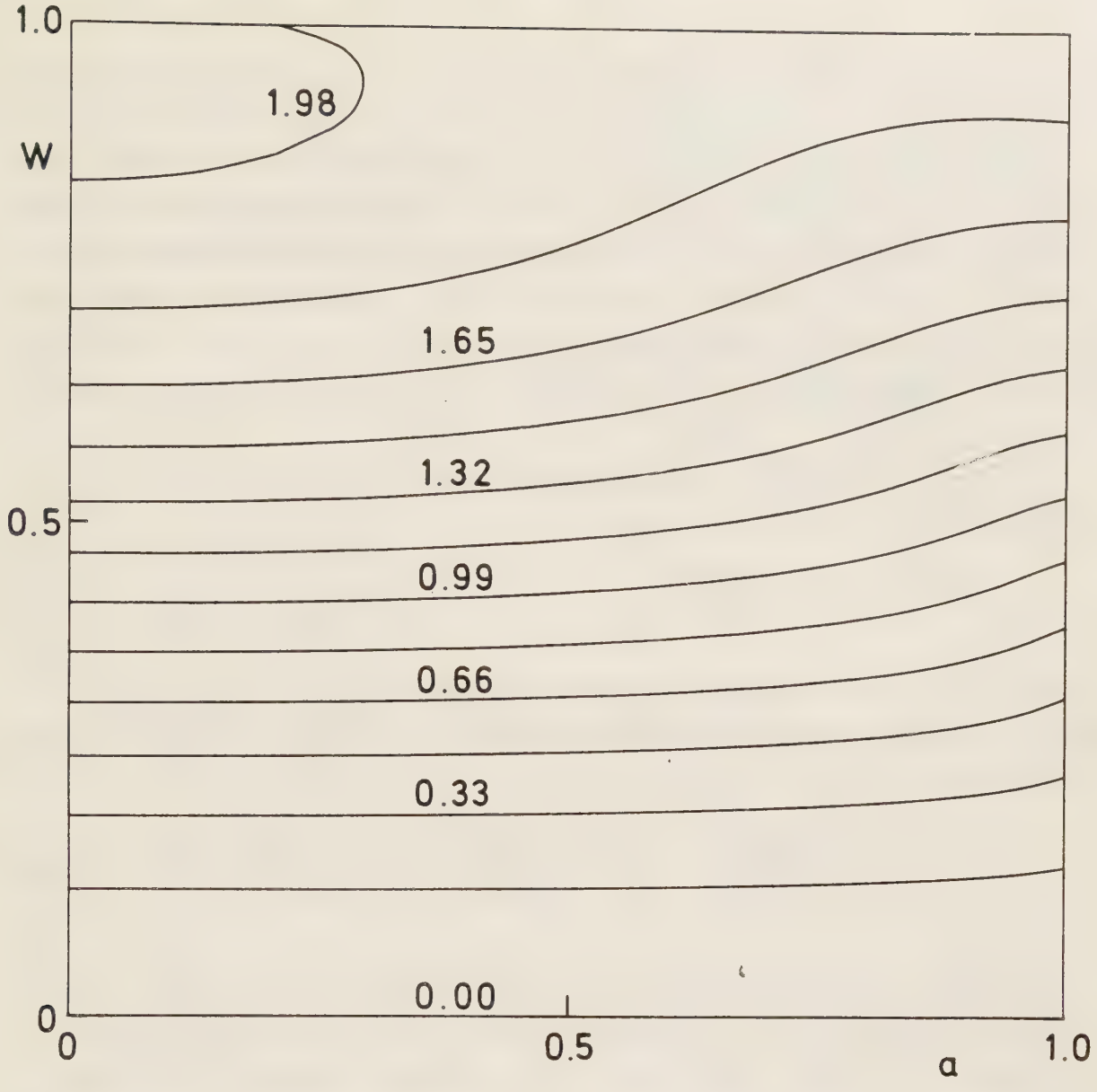
HMI-P-78-T-3100

Abb. 7: Höhenschichtliniendiagramm des Trägheitsparameters $m_{aa}(a,w)$. An der a-Achse liegen die Höhenschichtlinien unendlich dicht.



HMI-P-78-T-3098

Abb. 8: Höhenschichtlinien des Trägheitsparameters $m_{aw}(a,w)$. a- und w-Achse sind Nullinien.



HMI-P-78-T-3099

Abb. 9: Höhenschichtliniendiagramm des Trägheitsparameters $m_{ww}(a,w)$.

3.5 Schwerpunktskorrekturen

Bisher wurde angenommen, daß der Polarkreis im Raum ruht. Im Kapitel 4 sollen jedoch die Trägheitsparameter auf Streuprobleme angewendet werden. Dafür muß die kinetische Energie im Schwerpunktsystem berechnet werden, so daß zu den bisherigen Trägheitsparametern (3.42) bis (3.44) Korrekturen treten.

Der Schwerpunkt liegt stets auf der Symmetrieachse. Seine Lage ist dort

$$s=\frac{w^4}{4}\left\{(1-\cos\vartheta)^{-2}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}. \tag{3.46}$$

Zeitliche Differentiation und Verdrängung von $\dot\vartheta_1$ und $\dot\vartheta_2$ mit Hilfe der Verträglichkeitsrelationen (3.20) macht daraus die Schwerpunktsgeschwindigkeit

$$\dot s=-\frac{\dot a w}{3}\left\{\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}-\frac{\dot w w^3}{2}\left\{\frac{\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}. \tag{3.47}$$

Um die Stromfunktion vom alten Koordinatensystem ins Schwerpunktsystem zu transformieren, muß zur alten Stromfunktion Ψ_1 (3.34) eine neue, Ψ_2, addiert werden, die eine homogene Strömung längs der z-Achse mit der Geschwindigkeit $-\dot s$ beschreibt. Diese Funktion ist

$$\Psi_2=\dot s\,\frac{\rho^2}{2}, \tag{3.48}$$

was mit (3.11) leicht überprüft werden kann.

Setzt man die gesamte Stromfunktion $\Psi=\Psi_1+\Psi_2$ in das Integral (3.12) ein, so zerfällt die kinetische Energie in vier Summanden. Derjenige Summand, welcher nur Ψ_1 enthält, ist gerade der Beitrag, der im Abschnitt 3.4 ausgewertet worden ist. Der Summand mit Ψ_2 allein trägt $\dot s^2 V/2$ bei, weil das gerade die kinetische Energie einer starren Translation mit der Geschwindigkeit $\pm\dot s$ ist. Die Summanden, in denen

beide Stromfunktionen zugleich auftreten, sind gemischte kinetische Energien im Sinn der Gleichung (3.37) und liefern wegen der Vertauschbarkeit von Ψ_1 und Ψ_2 denselben Wert. Da von Ψ_1 nur die Randwerte (3.21) benötigt werden, Ψ_2 dagegen im gesamten Lösungsgebiet bekannt ist, findet man nach elementarer Rechnung

$$\frac{2\pi}{w}\int_0^\infty d\eta\cdot \operatorname{cosech}\eta\cdot\Lambda\cdot\Psi_1\cdot\partial_\vartheta\Psi_2\Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = -\frac{\dot s\pi w}{3}\left(\frac{4\dot\alpha}{3}\left\{\frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}+\dot w w^2\left\{\left(\frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta}\right)^2\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\right). \tag{3.49}$$

Wenn in dieser Gleichung und im Beitrag $\dot s^2\cdot V/2\ \dot s$ mittels (3.47) eliminiert wird, folgen unmittelbar die Korrekturterme für die Trägheitsparameter

$$\begin{aligned} m_{aa}^c &= -\frac{4\pi w^2}{27}\left(\left\{\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\right)^2,\\ m_{aw}^c &= -\frac{\pi w^4}{9}\left(\left\{\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\right)\cdot\left(\frac{1+\cos\vartheta_1}{\sin\vartheta_1}+\frac{1+\cos\vartheta_2}{\sin\vartheta_2}\right)\\ m_{ww}^c &= -\frac{\pi w^6}{3}\left\{\frac{\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\cdot\left\{\frac{1}{1-\cos\vartheta}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \end{aligned} \tag{3.50}$$

Die gesamten Trägheitsparameter sind also $m_{aa}+m_{aa}^c$, $m_{aw}+m_{aw}^c$ und $m_{ww}+m_{ww}^c$, wobei m_{aa}, m_{aw} und m_{ww} durch (3.42), (3.43) und (3.44) gegeben sind.

3.6 Grenzfälle

Für Anwendungen auf Schwerionenreaktionen ist der Grenzfall wichtig, bei dem sich die Kerne nur schwach berühren ($w\to 0$, $\vartheta_1\to 0$, $\vartheta_2\to 2\pi$). Dafür folgt aus den Gleichungen (3.7) oder direkt aus Abbildung *6*

$$\vartheta_1 \sim w/r_1\,,\quad 2\pi-\vartheta_2\sim w/r_2 \tag{3.51}$$

Die neu eingeführten Größen

$$r_1 := \left(\frac{1+a}{2}\right)^{1/3},\quad r_2 := \left(\frac{1-a}{2}\right)^{1/3} \tag{3.52}$$

bedeuten die Radien der schwach überlappenden Kugeln. Damit lassen sich aus (3.42) bis (3.44) sowie (3.50) besonders einfache asymptotische Formeln extrahieren:

$$m_{aa} \sim \frac{2\pi^2}{9w},$$

$$m_{aw} \sim -\frac{8\pi w}{9}(r_1+r_2)^2\cdot(r_1-r_2), \tag{3.53}$$

$$m_{ww} \sim \frac{4\pi w^2}{3} r_1\cdot r_2\cdot(r_1+r_2)^2.$$

Die Schwerpunktskorrekturen beeinflussen m_{aw} und m_{ww}, nicht aber m_{aa}, weil die zu m_{aa} gehörige Strömung so stark um den Hals herum konzentriert ist, daß sie den Schwerpunkt des gesamten Gebildes nur unbeträchtlich verschiebt. Es handelt sich hier also wiederum um eine Konsequenz des Konzentrationseffekts (vgl. die Abschnitte 2.2 und 3.4).

Daß m_{ww} asymptotisch gerade zu w^2 proportional ist, läßt sich mit Hilfe physikalischer Betrachtungen, die im Abschnitt 4.1.2 erläutert werden, verstehen.

Bei der Behandlung von Streuproblemen ist es allgemein üblich, als wichtigste Variable den Abstand zwischen Target und Projektil einzuführen. So soll auch hier die Halsweite w durch den Mittelpunktsabstand r der Kugeln ersetzt werden. Für kleine w folgt aus elementaren geometrischen Betrachtungen

$$w \sim \sqrt{\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}(r_1+r_2-r)}. \tag{3.54}$$

Da

$$\dot{a}=\dot{a}$$

$$\dot{w}=\partial_a w\cdot\dot{a}+\partial_r w\cdot\dot{r} \tag{3.55}$$

transformieren sich die Komponenten des Trägheitstensors (3.41) gemäß

$$\begin{aligned} \kappa &= m_{aa} + 2m_{aw}\cdot\partial_a W + m_{ww}\cdot(\partial_a W)^2, \\ \lambda &= m_{aw}\cdot\partial_r W + m_{ww}\cdot\partial_a W\cdot\partial_r W, \\ \mu &= m_{ww}\cdot(\partial_r W)^2. \end{aligned} \tag{3.56}$$

κ, λ und μ sind genau diejenigen Trägheitsparameter, die zur Form (3.2) der kinetischen Energie gehören. (3.56) wird mit (3.53) und (3.54) ausgewertet:

$$\begin{aligned} \kappa &= M\cdot le^2\cdot\frac{\pi}{6w}, \\ \lambda &= M\cdot le^2\,\frac{5}{6}(r_1^3\cdot r_2 - r_1\cdot r_2^3), \\ \mu &= M\cdot le^2\cdot r_1^3\cdot r_2^3. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Hier sind die Trägheitsparameter schon in physikalischen Einheiten angegeben. Außer der Gesamtmasse M enthalten sie den Faktor le^2 ($le=\sqrt[3]{3V/(4\pi)}$), der erforderlich ist, weil die Geschwindigkeiten $\dot{a}$ und $\dot{r}$ nur die Dimension einer inversen Zeit haben.

Den Trägheitsparameter κ vergleiche man mit (2.12) und m_{aa} aus Abbildung 7. μ aus (3.57) ist die reduzierte Masse, womit eine Vermutung bewiesen ist, die bereits in der Einleitung zum Kapitel 3 ausgesprochen wurde. Diese Gesichtspunkte bestätigen die Richtigkeit der nicht ganz elementaren Rechnung. Es sind aber noch andere Tests der Formeln (3.42) bis (3.44) vorgenommen worden: Erstens läßt sich das Randwertproblem für a=0, w=1 , also für den "Compoundkern", in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Geschwindigkeitspotentials lösen. Ein Vergleich der so gewonnenen Trägheitsparameter mit denen aus (3.42) bis (3.44) ergibt völlige Übereinstimmung für diesen Spezialfall [54]. Zweitens treten in (3.42) bis (3.44) Nenner der Form $(1+\cos\vartheta)^n$ (n=1,2,3) auf, so daß die Trägheitsparameter für $\vartheta_1, \vartheta_2 \to \pi$, d.h. für $a \to \pm 1$, scheinbar unendlich werden. Solche Singularitäten wären jedoch unphysikalisch. Tatsächlich zeigt eine detailierte Unter-

suchung, daß sich alle singulären Terme herausheben. Da bei dieser Prüfung alle Summanden der Massenparameter (3.42) bis (3.44) einbezogen werden müssen, dürfte dieser Test besonders zuverlässig sein.

3.7 Trägheitsparameter der Rotation

Mit den Trägheitsparametern κ, λ und μ der verkürzten kinetischen Energie (3.2) können nur zentrale Stöße behandelt werden. Weil aber gerade streifende Stöße in unelastischen Schwerionenreaktionen bevorzugt auftreten, benötigt man noch einen Näherungsausdruck für den Trägheitsparameter $\hat{\mu}$ (vgl. (3.1)).

Zu diesem Zweck werde die Strömung in zwei schwach überlappenden Kugeln, die sich um den gemeinsamen Schwerpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ drehen, untersucht. Zunächst kann das Strömungsfeld zu jedem Zeitpunkt in zwei Komponenten zerlegt werden. Der eine Anteil sei rotationssymmetrisch bezüglich der Mittelpunktsverbindung der beiden Kugeln; er führt auf die Trägheitsparameter κ, λ und μ von (3.57). Der zweite Anteil ist in Abbildung 10 skizziert. Er besteht aus zwei homogenen Strömungen, die senkrecht zur Mittelpunktsverbindung in den beiden Kugeln entgegengestzt verlaufen. Dabei bildet sich im Hals eine Diskontinuitätsfläche, die gestrichelt eingezeichnet ist. Daß eine solche Unstetigkeit auftreten muß, ergibt sich daraus, daß beim streifenden Stoß zwei Tropfen mit etwa entgegengesetzten Strömungsfeldern in tangentiale Berührung geraten. Das so konstruierte Strömungsfeld ist tatsächlich eine Lösung des hydrodynamischen Problems. Erstens sind die homogenen Strömungen Lösungen der Differentialgleichungen für ideale Flüssigkeiten; zweitens wird durch diese Strömungen die Kugelform aufrechterhalten, d.h. die Randbedingungen sind erfüllt; und drittens sind Diskontinuitätsflächen für ideale Flüssigkeiten geradezu typisch [55].

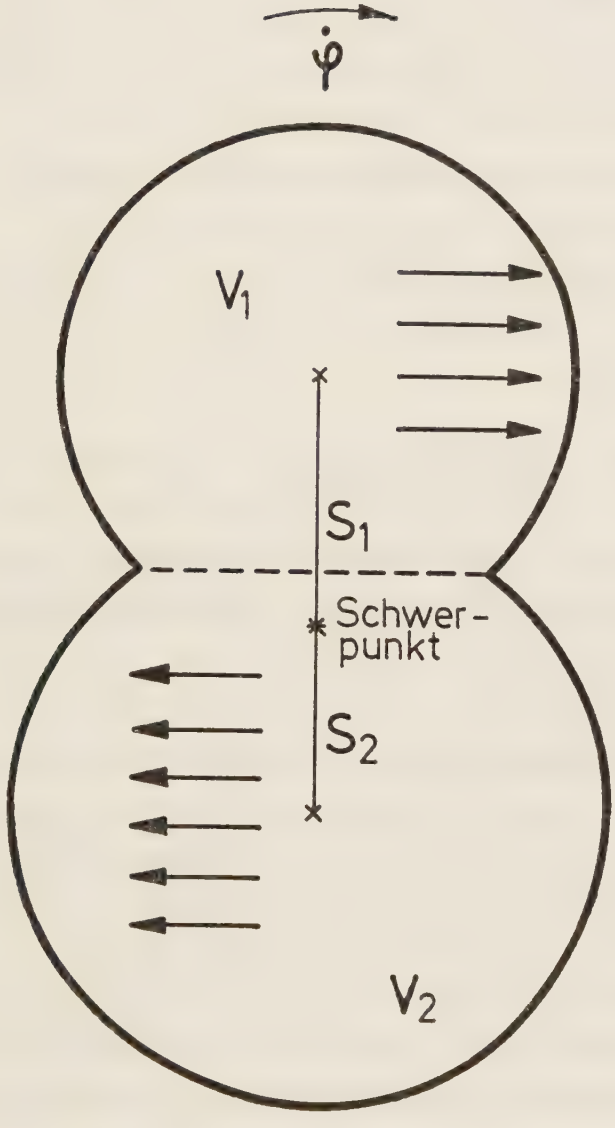


Abb. 10: Zum Trägheitsparameter der Rotation.

Die Strömungsgeschwindigkeiten innerhalb der beiden Kugeln sind konstant, nämlich $s_1\dot{\varphi}$ und $s_2\dot{\varphi}$, wobei s_1 und s_2 die Abstände der Kugelmittelpunkte vom Schwerpunkt bedeuten. Sind ferner V_1 und V_2 die Volumina der beiden Kugeln, so ist die kinetische Energie der Rotation

$$T_{rot} = \frac{D\dot{\varphi}^2}{2}\left(V_1 \cdot s_1^2 + V_2 \cdot s_2^2\right) \tag{3.58}$$

Da s_1 und s_2 mit dem Mittelpunktsabstand r über

$$s_1 = r \cdot V_2/V \,, \quad s_2 = r \cdot V_1/V \tag{3.59}$$

zusammenhängen, folgt

$$T_{rot} = \frac{\hat{\mu}}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 \,, \quad \hat{\mu} := D V_1 \cdot V_2/V. \tag{3.60}$$

Damit ist bewiesen, daß der Trägheitsparameter $\hat{\mu}$ aus der vollen kinetischen Energie (3.1) mit der reduzierten Masse übereinstimmt.

Dies gilt allerdings nur für die schwache Berührung der Kugeln. Denn bei starker Überlappung und dementsprechend starkem Massentransfer wird die Diskontinuitätsfläche tief in eine der beiden Kugeln hineingedrückt, so daß die obige Ableitung ihre Gültigkeit verliert. Außerdem wird bei lang andauerndem Kontakt der Tropfen die Diskontinuitätsfläche durch Reibung aufgelöst [56]. Dieser Effekt wird in den Trajektorienrechnungen des Kapitels 4 durch die Tangentialreibung simuliert.

4. Dynamik des Tröpfchenstoßes

Es ist jetzt möglich, die zeitliche Entwicklung zweier kollidierender Tröpfchen theoretisch zu verfolgen. Denn mit den im letzten Kapitel berechneten Massenparametern können leicht Bewegungsgleichungen aufgestellt werden, welche die Wechselwirkung zwischen dem Massenfluß (Variable a) und dem Abstand der Tröpfchen (Variable r) exakt wiedergeben. Allerdings beschränkt sich die vorliegende Arbeit auf streifende Stöße, da ja die Anwendung auf tiefunelastische Schwerionenreaktionen Zweck der Untersuchung ist. Demzufolge reichen zur Darstellung der Massenparameter die asymptotisch richtigen Formeln (3.57) aus.

Um die Erscheinungen, die der Massenfluß hervorruft, möglichst klar herauszupräparieren, soll zunächst die kräftefreie Bewegung untersucht werden. Dabei verdienen Berührung und Trennung der Tropfen besondere Aufmerksamkeit, denn der Massenparameter κ weist für diese Vorgänge eine Singularität auf ($w \to 0$), und es ist zunächst unbestimmt, wie unser mechanisches System diese Unendlichkeitsstelle überwindet.

"Kräftefrei" bedeutet nur, daß die statischen Potentiale gleich Null gesetzt werden. Da aber die Massenparameter explizit von den dynamischen Variablen a und r abhängen, treten Trägheitseffekte auf, die die Trajektorien beeinflussen. Um die Wirkung dieser "Trägheitskräfte" einsichtig zu machen, soll ein Verfahren zur Veranschaulichung der Hamiltonschen Gleichungen angegeben und auf das vorliegende Problem angewendet werden.

Nach dem Studium des kräftefreien Tröpfchenstoßes macht die Erweiterung des Reibungsmodells der tiefunelastischen Reaktionen um den Massentransfer keine Schwierigkeiten mehr. Am Beispiel der Reaktion Ar+Ni(280MeV) werden die Modifikationen der kräftefreien Bewegung durch statische Potentiale

und Reibung demonstriert. Es wird auch gezeigt, welche experimentell bestimmbare Größen durch unser Modell der Berechnung zugänglich gemacht werden. Eine dieser Größen, die Geschwindigkeit des Massentransports, wird für drei, in ihrer Art jeweils typische Schwerionenreaktionen mit bereits bekannten Daten verglichen. Daraus lassen sich Schlüsse über die Anwendbarkeit des hydromechanischen Modells auf Schwerionenreaktionen ziehen sowie Vorschläge für die Verbesserung dieses Modells ableiten.

4.1 Die kräftefreie Bewegung

4.1.1 Aufstellung der Bewegungsgleichungen

Statt der oft angewandten Lagrangegleichungen zweiter Art [10,57] sollen hier die Hamiltonschen Gleichungen bevorzugt werden, einmal, weil sie unmittelbar ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung darstellen, das nach den Ableitungen aufgelöst ist - ein Sachverhalt, der für die Anwendung bekannter numerischer Integrationsmethoden sehr wichtig ist - , zum zweiten, weil die Hamiltonschen Gleichungen eine sehr einfache anschauliche Deutung zulassen, die im Abschnitt 4.1.3 erläutert wird.

Maßgeblich für die kräftefreie Bewegung ist allein die kinetische Energie

$$T=\frac{\kappa}{2}\dot{a}^2+\lambda\dot{a}\dot{r}+\frac{\mu}{2}\dot{r}^2+\frac{\mu}{2}r^2\dot{\varphi}^2, \tag{4.1}$$

deren Massenparameter κ, λ und μ durch (3.57) gegeben sind. Daraus folgen sofort die Bestimmungsgleichungen für die kanonischen Impulse

$$\begin{aligned} p_a &= \kappa\dot{a}+\lambda\dot{r} \\ p_r &= \lambda\dot{a}+\mu\dot{r} \\ p_\varphi &= \mu r^2\dot{\varphi}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

deren Umkehrung

$$\begin{aligned}\dot{a} &= u_\kappa \cdot p_a + u_\lambda \cdot p_r \\ \dot{r} &= u_\lambda \cdot p_a + u_\mu \cdot p_r \\ \dot{\varphi} &= p_\varphi/(\mu r^2)\end{aligned} \tag{4.3}$$

lautet. Dabei kommt der inverse Massentensor

$$\begin{pmatrix} u_\kappa & u_\lambda \\ u_\lambda & u_\mu \end{pmatrix} := \frac{1}{\kappa\mu - \lambda^2} \begin{pmatrix} \mu & -\lambda \\ -\lambda & \kappa \end{pmatrix}$$

ins Spiel. Für den Grenzfall schwacher Berührung strebt κ nach Unendlich, so daß asymptotisch

$$\begin{pmatrix} u_\kappa & u_\lambda \\ u_\lambda & u_\mu \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1/\kappa & -\lambda/\kappa\mu \\ -\lambda/\kappa\mu & 1/\mu \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

gilt. Mittels dieser Formel ist unmittelbar einsichtig, daß u_κ und u_λ um so kleiner werden, je weniger sich die Tröpfchen berühren. Darum setzt man u_κ, u_λ und alle ihre Ableitungen nach a und r zweckmäßig gleich Null, sobald die Tröpfchen außer Kontakt sind. Andererseits hängt u_μ nur von der Asymmetrie a ab und erleidet somit nicht die geringste Unstetigkeit beim Berühren und Trennen der Tropfen. u_κ, u_λ und u_μ sind in den Abbildungen 11 bis 13 dargestellt.

Die kinetische Energie (4.1), welche zugleich die Hamiltonsche Funktion ist, verwandelt sich durch Elimination der Geschwindigkeiten $\dot{a}$, $\dot{r}$ und $\dot{\varphi}$ in

$$H = \frac{u_\kappa}{2} p_a^2 + u_\lambda \cdot p_a p_r + \frac{u_\mu}{2}\left(p_r^2 + p_\varphi^2/r^2\right) \tag{4.5}$$

woraus sofort

$$\begin{aligned}\dot{p}_a &= -\frac{\partial_a u_\kappa}{2} p_a^2 - \partial_a u_\lambda \cdot p_a p_r - \frac{\partial_a u_\mu}{2}\left(p_r^2 + p_\varphi^2/r^2\right) \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial_r u_\kappa}{2} p_a^2 - \partial_r u_\lambda \cdot p_a p_r + \frac{u_\mu \cdot p_\varphi^2}{r^3} \\ \dot{p}_\varphi &= 0\,, \quad p_\varphi = L = \text{const.}\end{aligned} \tag{4.6}$$

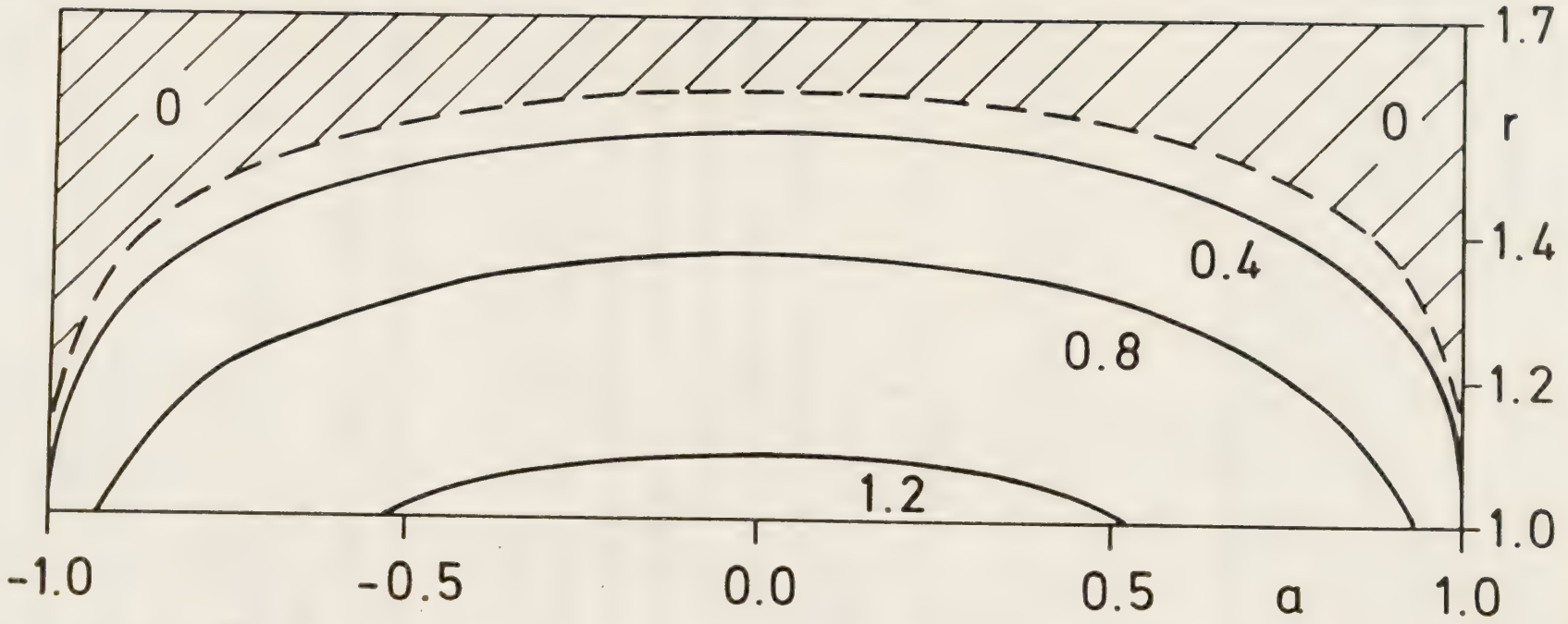


Abb. 11: Inverser Trägheitsparameter u_K als Funktion der Asymmetrie a und des Mittelpunktsabstandes r der Tropfen. u_K verschwindet außerhalb des gestrichelt eingezeichneten Berührradius.

Zu den Einheiten in den Abbildungen 11 bis 21: Alle Rechnungen im Abschnitt 4.1 sind in dimensionslosen Einheiten ausgeführt, d.h.

Trägheitsparameter in Einheiten der Gesamtmasse (M=1 in (3.57)),
Längen in Einheiten des Radius des Compoundtropfens (le=1 in (3.57)),
Zeiten in Einheiten von 10^{-23}s.

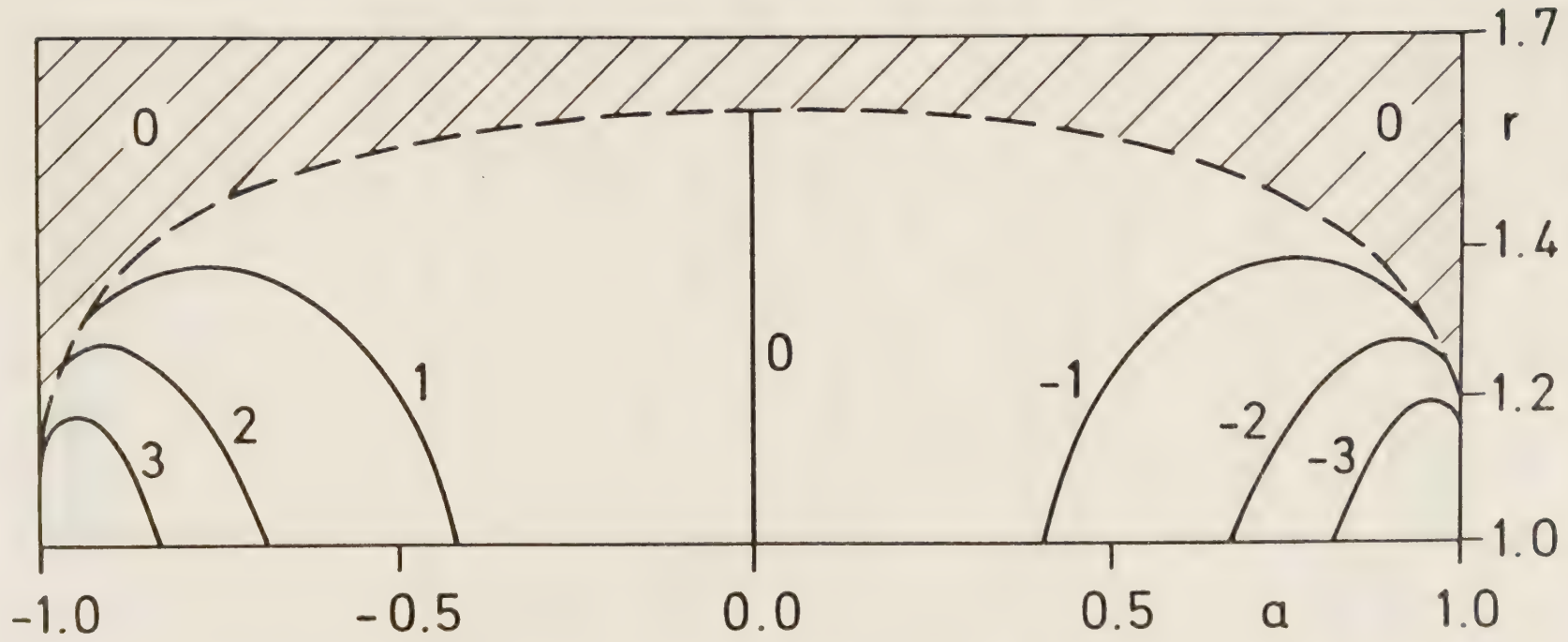


Abb. 12: Inverser Trägheitsparameter $u\lambda$ als Funktion der Asymmetrie a und des Mittelpunktsabstands r. $u\lambda$ ist außerhalb des gestrichelt eingezeichneten Berührradius gleich Null.

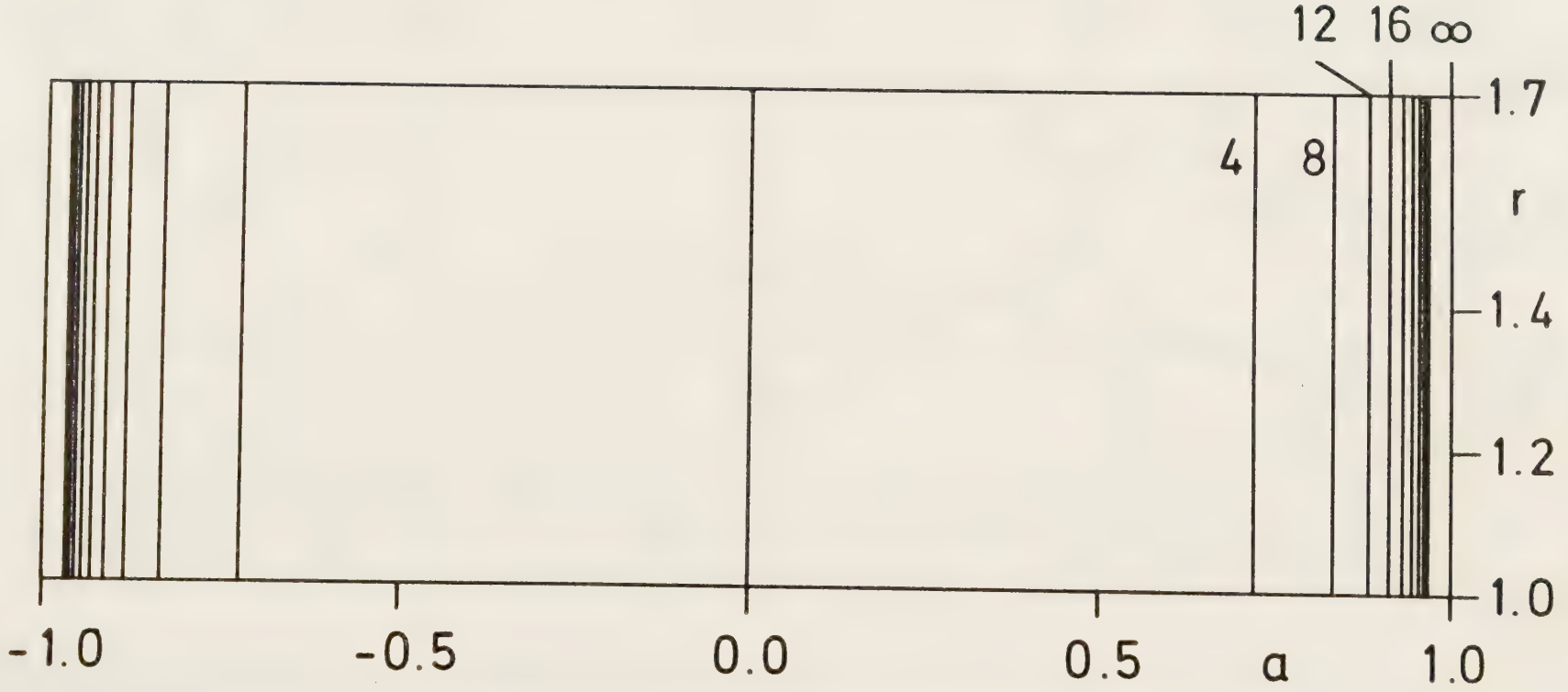


Abb. 13: Inverser Trägheitsparameter u_μ als Funktion der Asymmetrie a und des Mittelpunktsabstands r. u_μ ist symmetrisch in ±a und hängt von r nicht ab.

folgt. (4.6) zusammen mit (4.3) bilden die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen des hydrodynamischen Modells. Bemerkenswert ist die erste Gleichung von (4.6): Man erkennt, daß sich p_a auch außerhalb der Berührung verändert, da der Term mit $\partial_a u_\mu$ im allgemeinen nicht verschwindet. Andererseits richtet dieses zunächst befremdliche Verhalten des Impulses p_a auch keinen Schaden an, weil es wegen $u\kappa=u\lambda=\partial_a u\kappa=\partial_a u\lambda=\partial_r u\kappa=\partial_r u\lambda=0$ nicht auf die Entwicklung von a, r und φ rückkoppeln kann.

Diese Eigenheit des Differentialgleichungssystems (4.3) und (4.6) wirkt sich auf die Anfangsbedingungen für Lagen (a,r,φ) und Impulse (p_a,p_r,p_φ) aus. Während man für $t\to-\infty$ als Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} &a=a_0=\text{const}\,, \quad r\to\infty\,, \quad \varphi=0 \\ &p_a \text{ beliebig}\,, \quad p_r=\sqrt{2\mu E}\,, \quad p_\varphi=L=b\sqrt{2\mu E} \end{aligned} \tag{4.7}$$

festzusetzen hat, wobei E die Schwerpunktsenergie und b den Stoßparameter bedeuten, muß man bei der Berührung der Tropfen über p_a geeignet verfügen, da der Impuls p_a von nun an die Bewegung kräftig beeinflußt. Auch fragt es sich, ob der Impuls p_r über den Berührradius hinweg stetig fortgesetzt werden darf; denn beim Stoß zweier ideal harter, elastischer Kugeln ändert sich p_r sprunghaft. Dagegen dürfte die Stetigder Lagen (a,r,φ) sowie des Drehimpulses p_φ wegen des Erhaltungssatzes außer Zweifel stehen.

4.1.2 Berührung und Trennung der Tropfen

Um die im letzten Abschnitt aufgeworfenen Fragen beantworten zu können, benötigt man gewisse Einsichten in das Verhalten der Lösungen von (4.3) und (4.6) für $r\to r_0-0$, wo

$$r_0:=\left(\frac{1+a_0}{2}\right)^{1/3}+\left(\frac{1-a_0}{2}\right)^{1/3} \tag{4.8}$$

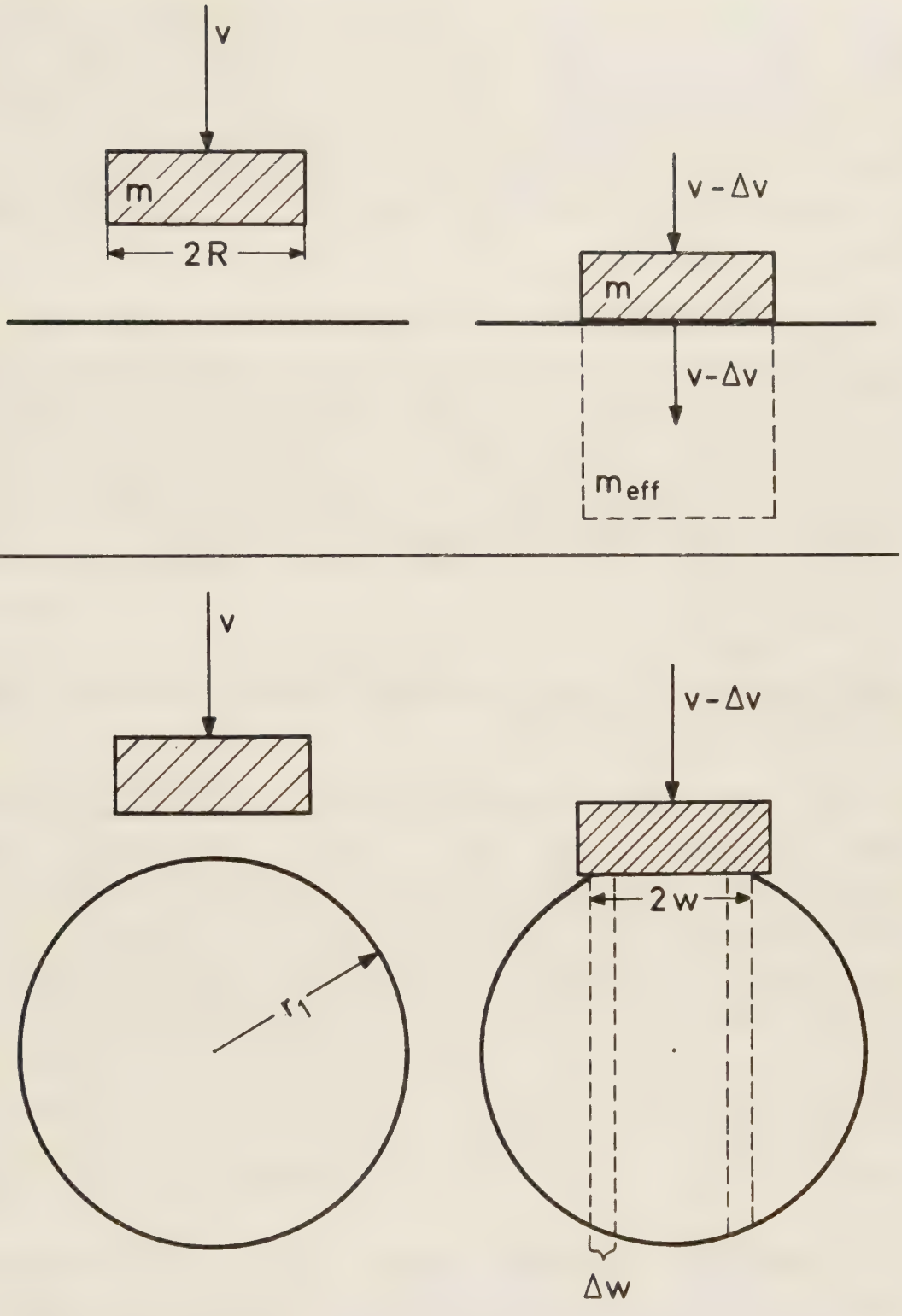
der Berührradius ist.

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bekannt, daß an denjenigen Stellen, an welchen die Lipschitz-Bedingung zusammenbricht, nicht mehr alle Anfangswerte frei vorgegeben werden können, sondern nur ein Teil von ihnen. Bekannte Beispiele sind die Legendresche und die Besselsche Differentialgleichung. Ähnliches trifft auch für das vorliegende Differentialgleichungssystem zu. Nehmen wir vorerst an, wir hätten statt des Impulses p_a die Geschwindigkeit $\dot{a}$ am Berührradius zu bestimmen. Unmittelbar aus dem Energiesatz $T=E$ (vgl. (4.1)) folgt, daß $\dot{a}$ auf dem Berührradius verschwinden muß. Denn andernfalls wird dort der Summand $\varkappa\dot{a}^2/2$ beliebig groß, während doch die anderen Summanden beschränkt bleiben und die kinetische Energie als Ganzes ebenfalls endlich, nämlich gleich E, bleiben muß.

Allerdings hilft diese noch recht ungenaue Auskunft über $\dot{a}$ bei der Bestimmung von p_a wenig. Denn in der ersten Gleichung von (4.2) entsteht in $\varkappa\dot{a}$ ein unbestimmter Ausdruck, da ja bei verschwindendem $\dot{a}$ $\varkappa$ unbeschränkt anwächst. Immerhin folgt aus der zweiten Gleichung von (4.2), daß am Berührradius $p_r=\mu\dot{r}$ ist. Das Stetigkeitsverhalten der Geschwindigkeit $\dot{r}$ bestimmt also unmittelbar das des Impulses p_r. So soll als erstes nachgewiesen werden, daß bei der Berührung der Tropfen $\dot{r}$ und damit auch p_r stetige Funktionen der Zeit sind. Daraus lassen sich dann asymptotisch genauere Aussagen über $\varkappa$ und $\dot{a}$ herleiten, mit denen schließlich der Anfangswert von p_a am Berührradius berechnet werden kann.

Statt des Stoßes zwischen zwei Tröpfchen soll zunächst der Aufprall einer festen, kreisförmigen Platte auf eine ebene Flüssigkeitsoberfläche erörtert werden[1]. Bis zum Aufprall nähert sich die Platte mit der Masse m und der Geschwindigkeit v der Oberfläche (vgl. Abb. 14). Sobald die Platte aufprallt, muß die Flüssigkeit schlagartig in Bewegung ver-

[1] Sommerfelds Vorlesungen über Mechanik [59] haben die folgenden Überlegungen angeregt.



HMI-P-79-T-4019

Abb. 14: Aufprall einer festen Platte auf eine ebene Flüssigkeit und einen Tropfen.

setzt werden, damit die Platte noch weiter nach unten sinken kann. Natürlich bildet sich dabei in der Flüssigkeit ein kompliziertes Strömungsfeld aus, das aber einem Flüssigkeitsblock mit etwa quadratischem Querschnitt, der mit der Geschwindigkeit $v-\Delta v$, $\Delta v>0$ absinkt, gleichwertig ist [58]. Die effektive Masse dieses Flüssigkeitsblocks hat also die Größenordnung

$$m_{eff} \approx D \cdot 2\pi R^3, \tag{4.9}$$

wobei D die Dichte der Flüssigkeit und R den Radius der Platte bezeichnen. Da Stöße, an denen Flüssigkeiten beteiligt sind, absolut unelastisch erfolgen, ist nach dem Aufprall $v-\Delta v$ die gemeinsame Geschwindigkeit der erfaßten Flüssigkeitsoberfläche und der Platte. Der Impulssatz liefert

$$\Delta v = \frac{m_{eff}}{m_{eff}+m} v. \tag{4.10}$$

Somit ergibt sich hier ein Sprung im zeitlichen Verlauf der Relativgeschwindigkeit.

Um den Verhältnissen beim Stoß zweier flüssiger Kugeln näher zu kommen, wollen wir die Platte als Bild des einen Tropfens noch beibehalten, aber die unendlich ausgedehnte Flüssigkeitsoberfläche zu einer Kugel mit dem Radius r_1 zusammenziehen. Die Überlegungen des letzten Absatzes bleiben im Prinzip bestehen, doch ist der Flüssigkeitsblock durch ein System von Röhrchen zu ersetzen, deren Radius w, deren Dicke Δw und deren Länge etwa $2r_1$ betragen sollen und die wie eine Teleskopantenne ineinander geschoben gerade den Kugeltropfen erzeugen (vgl. Abb. 14). Statt (4.9) entsteht so

$$\Delta m_{eff} \approx D \cdot 4\pi r_1 w \cdot \Delta w, \tag{4.11}$$

was integriert gerade das asymptotische Verhalten des Massenparameters m_{ww} (3.53) wiedergibt. Trifft also die Platte auf den Kugeltropfen, so plattet sie ihn allmählich ab, wobei Platte und Tropfen längs einer Scheibe mit dem stetig wachsenden Radius w anliegen. Dabei schiebt die Platte ein Röhr-

chen nach dem anderen an und verliert dabei jeweils die Geschwindigkeit Δv. Doch ist Δv jetzt eine infinitesimale Größe, weil in (4.10) das endliche m_{eff} durch das unendlich kleine Δm_{eff} ersetzt werden muß. Demzufolge ist die Relativgeschwindigkeit in diesem Fall eine stetige Funktion der Zeit.

Es tut dieser Stetigkeit keinen Abbruch, wenn zu guter Letzt die harte Platte in einen zweiten Flüssigkeitstropfen umgewandelt wird. Man zerlegt dann auch diesen Tropfen in ein System von Röhrchen und verfolgt den Zusammenprall genauso wie im letzten Absatz: Der Stetigkeitscharakter der Relativbewegung ändert sich nicht mehr. Auch die bei streifenden Stößen wichtige Zentrifugalkraft beeinflußt die Stetigkeit nicht.

Die bisher bewiesenen Tatsachen können in den Gleichungen

$$r(t)=r_0+\dot{r}_0 t+o(t), \quad p_r(t)=p_r^0+o(1) \tag{4.12}$$

zusammengefaßt werden. Die Zeit wird jetzt von der Berührung an gemessen. $\dot{r}_0$ und p_r^0 sind die Werte der Radialgeschwindigkeit und des Radialimpulses bei der Berührung. Aus (4.12) und den Bestimmungsgleichungen für die Massenparameter κ, λ und μ (3.57) (vgl. auch (3.54)) folgt sofort

$$\kappa \sim \kappa_0 t^{-1/2}, \quad \lambda \sim \lambda_0, \quad \mu \sim \mu_0 \quad \text{für } t \to 0, \tag{4.13}$$

wobei κ_0, λ_0 und μ_0 Konstanten sind.

Die Relationen (4.13) ermöglichen die genauere Analyse des zeitlichen Verlaufs der Asymmetrie am Berührradius. Wird nämlich der Energieerhaltungssatz mit dem Drehimpulserhaltungssatz[1] kombiniert, kommt nach (4.1) eine Differential-

[1] Die Verwendung von Erhaltungssätzen bei der Untersuchung von Unstetigkeiten mechanischer Systeme ist ein Standardverfahren [60].

gleichung erster Ordnung zwischen a(t) und r(t) zustande:

$$\frac{\kappa}{2}\dot{a}^2+\lambda\dot{a}\dot{r}-E_v=0. \tag{4.14}$$

$$E_v:=E-\frac{\mu}{2}\dot{r}^2-\frac{L^2}{2\mu r^2} \tag{4.15}$$

ist diejenige Energie, welche der Relativbewegung verloren gegangen ist. Natürlich muß E_v bis zur Berührung der Tropfen identisch gleich Null sein und darf erst während des Massentransports anwachsen. Aufgelöst nach $\dot{a}$ verwandelt sich (4.14) in

$$\dot{a}=(-\lambda\dot{r}\pm\sqrt{\lambda^2\dot{r}^2+2\kappa E_v})/\kappa. \tag{4.16}$$

Es sei nun versuchsweise angenommen, daß

$$E_v(t)\propto t \qquad \text{für } t\to 0. \tag{4.17}$$

so daß auch $\kappa\cdot E_v$ laut (4.13) noch nach Null strebt. Dann ergeben sich durch Entwicklung der Wurzel und unter Verwendung von (4.12) und (4.13) leicht die folgenden Ausdrücke

$$\dot{a}(t)\sim-2\lambda\dot{r}/\kappa\propto t^{1/2} \qquad \text{(1/2-Lösung)} \tag{4.18.1/2}$$

$$\dot{a}(t)\sim E_v/(\lambda\dot{r})\propto t^1. \qquad \text{(1-Lösung)} \tag{4.18.1}$$

Werden diese Resultate in die erste Gleichung von (4.2) eingesetzt und zugleich (4.12) und (4.13) verwertet, so findet man zwei verschiedene Werte für den Impuls p_a am Berührradius

$$p_a^0=-\lambda_0\dot{r}_0=-\frac{\lambda_0}{\mu_0}p_r^0 \tag{4.19.1/2}$$

$$p_a^0=\lambda_0\dot{r}_0=\frac{\lambda_0}{\mu_0}p_r^0. \tag{4.19.1}$$

Man darf aus der hier vorliegenden Zweideutigkeit nicht schlußfolgern, daß sich die Trajektorie bei der Berührung der Tropfen tatsächlich aufgabelt, auch wenn Verzweigungserscheinungen bei nichtlinearen Differentialgleichungen nichts Ungewöhnliches sind. Vielmehr macht man sich an elementaren Beispielen der Mechanik, deren Trajektorien man an beliebigen

Stellen unterbrechen und mittels des Energiesatzes fortsetzen kann, leicht klar, daß immer nur ein Vorzeichen in der (4.16) entsprechenden Gleichung richtig sein kann. In unserem Fall ist dies die 1-Lösung, da die 1/2-Lösung in Widerspruch zu den Grundgesetzen der Hydrodynamik steht.

Dies sieht man folgendermaßen ein: Aus $\dot{a} \propto t^{1/2}$ folgt nach (3.52) $\dot{r}_1 \propto t^{1/2}$ und $r_2 \propto -t^{1/2}$. Die Oberflächen werden also im Fall der 1/2-Lösung bei der Berührung unendlich stark beschleunigt. Nun sind bei der die Asymmetrie verändernden Strömung die Oberflächen stets langsamer als die Flüssigkeit im Innern, die ja den engen Hals passieren muß. Also folgt aus $\ddot{a}(t) \to \infty$ die Divergenz der Beschleunigung

$$\frac{dv}{dt} \to \infty \quad \text{für} \quad t \to 0 \tag{4.20}$$

im gesamten Komplex. Andererseits integriere man die Eulergleichung (B.2) längs eines "Beschleunigungsfadens[1]" (d.h. $d\underline{v}/dt \parallel d\underline{r}$) zwischen zwei Oberflächenpunkten $\underline{o}_1$ und $\underline{o}_2$

$$\rho \int_{\underline{o}_1}^{\underline{o}_2} \left|\frac{d\underline{v}}{dt}\right| \cdot |d\underline{r}| = \int_{\underline{o}_1}^{\underline{o}_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} + p(\underline{o}_1) - p(\underline{o}_2) . \tag{4.21}$$

$p(\underline{o}_1)$ und $p(\underline{o}_2)$ sind Innendrücke an der Oberfläche, so daß aus den Randbedingungen der freien Oberfläche (B.3)

$$p(\underline{o}_1) - p(\underline{o}_2) = \left(\frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_2}\right)\sigma < \infty \tag{4.22}$$

folgt; der Außendruck ist ja überall konstant. r_1 und r_2 sind die Radien der beiden Kugeln, σ die Oberflächenspannung. Zu $\underline{F}$ gehören im vorliegenden Fall, da in einem rotierenden Koordinatensystem gerechnet wird, die Zentrifugalkräfte. Sie sind aber überall im Raum endlich, so daß auch das Linienintegral über $\underline{F}$ beschränkt ist. Wir haben also

$$\int_{\underline{o}_1}^{\underline{o}_2} \left|\frac{d\underline{v}}{dt}\right| \cdot |d\underline{r}| < \infty \tag{4.23}$$

---

[1] Ein Beschleunigungsfaden sieht qualitativ genauso aus wie eine Stromlinie in der Abbildung 3.

für alle Zeiten, was der 1/2-Lösung wegen ihrer Eigenschaft (4.20) widerspricht[1,2].

Es muß noch die Hypothese (4.17) überprüft werden. Zu diesem Zweck geht man mit Ansätzen der Form

$$a(t)=a_0+a_1 t^{1+\mu}+\dots \qquad p_a(t)=p_a^0+\dots$$
$$r(t)=r_0+r_1 t \quad +r_2 t^{1+\nu}+\dots \qquad p_r(t)=p_r^0+\dots \tag{4.24}$$

in die Differentialgleichungen ein, wobei die Gleichungen für Winkel und Drehimpuls überflüssig sind. Als einzige Lösungen für die Exponenten kommen tatsächlich

$$\mu=\nu=1/2 \tag{4.25.1/2}$$

und

$$\mu=\nu=1 \tag{4.25.1}$$

heraus. Damit läßt sich die verlorene Energie $E_v(t)$ (vgl. (4.15)) genau genug abschätzen:

$$E_v(t)\propto t^{1/2} \tag{4.26.1/2}$$

$$E_v(t)\propto t \tag{4.26.1}$$

Also ist die Hypothese (4.17) für die 1-Lösung gerechtfertigt, dagegen für die 1/2-Lösung falsifiziert. Wird aber (4.26.1/2) in (4.16) eingesetzt, so kommt wieder $\dot{a}(t)\propto t^{1/2}$ heraus, doch geht (4.19.1/2) über in: p_a^o=beliebig, aber fest. Gibt man also p_a^o am Berührradius irgendwie vor, so läuft $\dot{a}(t)$ stets wie $t^{1/2}$ aus dem Ursprung heraus, und nur unter der Bedingung (4.19.1) entwickelt sich ein weicheres Verhalten.

---

[1] Der Zusammenhang dieses Widerspruchsbeweises mit dem grundlegenden Lösungsverfahren der hydrodynamischen Gleichungen wird im Anhang B erklärt.

[2] Man macht sich leicht klar, daß der Widerspruchsbeweis ähnlich wie die Abschätzungen im Abschnitt 2.3 von mathematisch exakter Inkompressibilität und der genauen Einhaltung der Kugelgestalt keinen Gebrauch macht.

Damit sind die Berührungsbedingungen eindeutig ermittelt:

$$p_a(0) = \frac{\lambda(a(0),r(0))}{\mu(a(0),r(0))}\, p_r(0) \qquad \left.\begin{matrix} a(t), r(t), \varphi(t) \\ p_r(t), p_\varphi(t) \end{matrix}\right\} \text{stetig.} \quad (4.27)$$

Zusammen mit den Anfangsbedingungen (4.7) ermöglichen sie die eindeutige Lösung der Hamiltonschen Gleichungen (4.3) und (4.6).

Tritt die 1/2-Lösung also überhaupt nicht auf? Sie tut es, denn die singuläre Situation der Berührung kehrt bei der Trennung wieder. Lediglich geht t in τ-t über, wo τ die Dauer der Reaktion bedeuten soll. Bei der Trennung darf aber, im Gegensatz zur Berührung, der Asymmetrieimpuls p_a nicht vorgegeben werden, sondern er spielt sich aufgrund der Berührungsbedingungen und der Bewegungsgleichungen auf einen Wert ein, der, wie sich im nächsten Abschnitt erweisen wird, verschieden von $\lambda p_r/\mu$ sein muß. Dann aber kommt es zwangsläufig zu einer 1/2-Lösung. Daß dies auch wirklich so ist, demonstriert Abbildung 15: Beide numerisch berechneten Asymmetriegeschwindigkeiten laufen tatsächlich wie $(\tau-t)^{1/2}$ aus[1].

Die Argumente, die zuungunsten der 1/2-Lösung bei der Berührung vorgebracht worden sind, treffen bei der Trennung nicht zu. Unser Modell aus zwei Kugeltropfen ist nämlich für die Berührung maßgeschneidert. Bei der Trennung leidet es darunter, daß Halsbildung und Oberflächenschwingungen künstlich unterdrückt werden. Es ist sogar erstaunlich, wie dieses grob vereinfachte Modell Vorgänge zu simulieren versucht, die erst ein System mit einer größeren Anzahl von Freiheitsgraden meistern kann: Man sieht in Abbildung 16, wie bei der 1-Lösung die Energie langsam in den Asymmetriefreiheitsgrad gepumpt wird, um Hals über Kopf wieder herausgewürgt zu wer-

---

[1] Es scheint nur so, als ob sich die 1-Lösung bei der Berührung wie $t^{3/2}$ verhielte. In Wirklichkeit ist die t^1-Phase nur außerordentlich kurzlebig ($t \approx 10^{-3} \cdot 10^{-23}$s). Die Ursache für dieses Verhalten wird im nächsten Abschnitt erläutert.

Zu den Abbildungen 15 bis 21:

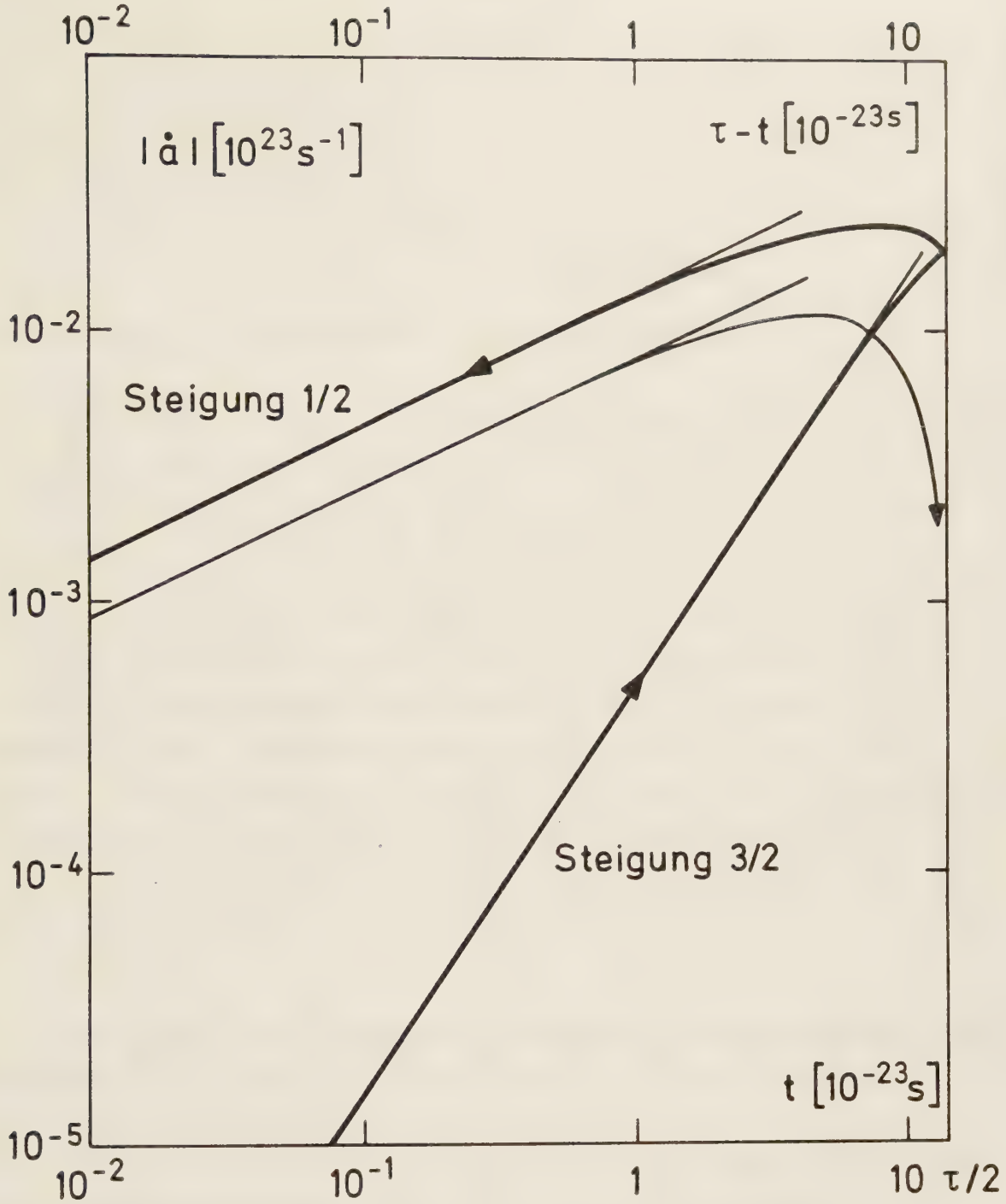
Die Anfangsvorgaben, die in die Trajektorienrechnungen des Abschnitts 4.1 eingehen, sind der Reaktion $^{40}Ar+^{58}Ni$ angepaßt. Im einzelnen ist:

Anfangsasymmetrie	$a_o = 0.18$	
reduzierte Masse	$\mu = 0.24$	($\hat{=}$22 000 MeV/c^2)
Energie	$E = 2.9$	($\hat{=}$86 MeV[1])
Stoßparameter	$b = 1.42$	($\hat{=}$7.4 fm)
Drehimpuls	$L = 1.7$	($\hat{=}$75 $\hbar$)

Vergleiche (4.7).

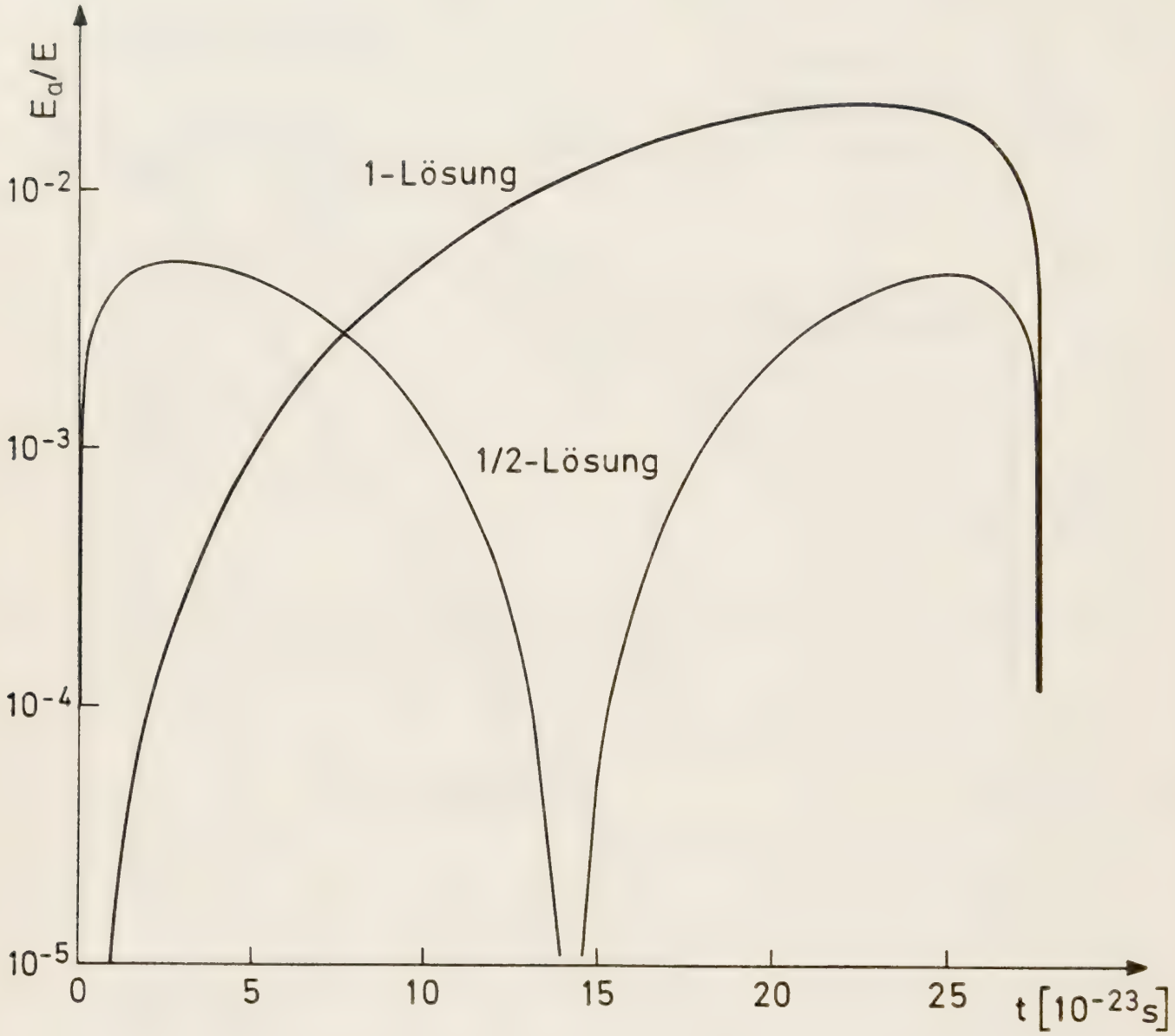
Über die dimensionslosen Einheiten gibt die Unterschrift zur Abbildung 11 Auskunft.

[1] Energie oberhalb der Coulombbarriere



HMI-P-79-T-4020

Abb. 15: Betrag der Asymmetriegeschwindigkeit $|\dot{a}|$ als Funktion der Zeit t. Die stark ausgezogene Kurve stellt die 1-Lösung dar. Für den einlaufenden Zweig $t \leq \tau/2$ (τ Reaktionsdauer) ist die untere, für den auslaufenden Zweig $t > \tau/2$ ist die obere Zeitskala zu benutzen. Von der 1/2-Lösung ist nur der einlaufende Zweig eingetragen; der auslaufende überdeckt den einlaufenden nahezu. Der starke Abfall der 1/2-Lösung für $t \rightarrow \tau/2$ rührt vom Umkehrpunkt der Asymmetrie a für $t \approx \tau/2$ her. Man vergleiche mit Abbildung 17.



HMI-P-79-T-3013

Abb. 16: Relativer Energieinhalt E_a/E des Asymmetriefreiheitsgrads. $E_a := \kappa/2 \cdot \dot{a}^2$, E ist die Gesamtenergie des Systems. Die Singularität für $t \approx 14$ bei der 1/2-Lösung ist nur der Ausdruck der logarithmischen Auftragung für eine Nullstelle von E_a. Diese Nullstelle geht auf den Umkehrpunkt der Asymmetrie bei $t \approx 14$ zurück (vgl. Abb. 17).

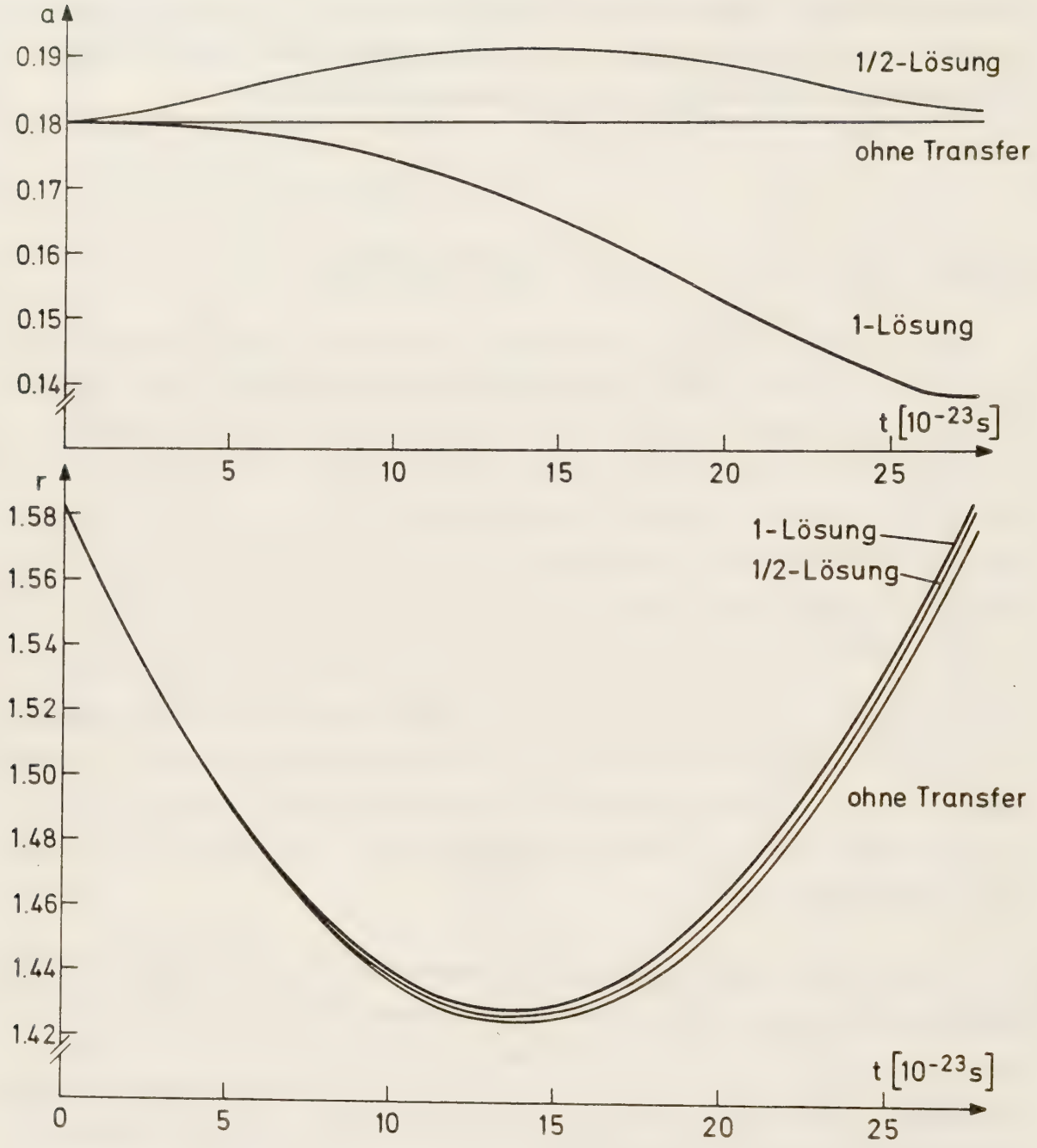
den. Hier liegt die Deutung nahe, daß die Asymmetrieenergie in Wirklichkeit kaum in die Relativbewegung zurückkehrt, sondern sich größtenteils in Halsbildung und Oberflächenschwingungen umwandelt und so dissipiert wird.

4.1.3 Veranschaulichung der Transferreaktion

Abbildung 17 zeigt numerisch berechnete, typische Lösungen a(t) und r(t) der Hamiltonschen Gleichungen (4.3) und (4.6). Außer der einzig richtigen 1-Lösung ist zur Demonstration eine 1/2-Lösung, und zwar die nach (4.19.1/2) berechnete, und die transferfreie Bahn, die ja nichts anderes als die geradlinige Bewegung eines freien Massenpunkts darstellt, eingetragen. Qualitativ läßt sich das zeitliche Verhalten folgendermaßen charakterisieren: Die Asymmetrie a nimmt bei der 1-Lösung ständig ab, während sie bei der 1/2-Lösung zuerst anwächst, um dann fast symmetrisch zum ursprünglichen Wert zurückzukehren. Der Mittelpunktsabstand r weicht für 1- und 1/2-Lösung kaum vom transferfreien Fall ab. Sie liegen beide, die 1-Lösung ausgeprägter, oberhalb der transferfreien Bahn.

Man kann diese Eigenheiten als die Ergebnisse eines in Einzelheiten unüberschaubaren Rechenprogramms hinnehmen; es wäre aber erfreulicher, auch um die Wirksamkeit etwaiger Modifikationen des Modells abschätzen zu können, diese Phänomene anschauungsmäßig auf die Gestalt der inversen Massenparameter u_κ, u_λ und u_μ (Abb. 11 bis 13) zurückführen zu können.

Die zuletzt erwähnte Eigenart, nämlich daß der Transfer auf die Relativbewegung wie eine abstoßende Kraft wirkt, ist leicht zu erklären: Wie aus Abbildung 16 ersichtlich, saugt der Asymmetriefreiheitsgrad einen Bruchteil der Energie des Systems auf. Diese Energie fehlt der Relativbewegung beim Erklimmen des Drehimpulshangs $u_\mu \cdot L^2/(2r^2)$, so daß der Umkehr-



HMI-P-79-T-2009

Abb. 17: Asymmetrie a und Mittelpunktsabstand r als Funktionen der Zeit.

punkt der Relativbewegung hinausgeschoben wird. Dieser Effekt ist um so größer, je mehr Energie der Asymmetriefreiheitsgrad aufnimmt. Darum ist die Abstoßung bei der 1-Lösung besonders stark. Der Effekt ist hier, bei der freien Bewegung, klein; 2% der Gesamtenergie oder weniger gelangen in die Asymmetriebewegung. Doch wird er sich bei den Spiralbahnen des Reibungsmodells (Abschnitt 4.2.3) als sehr wichtig erweisen.

Die anderen Charakteristika der Trajektorien erfordern eine detailiertere Behandlung.

Als eine allgemeine Methode zur graphischen Konstruktion oder auch zur Veranschaulichung der Hamiltonschen Gleichungen

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{4.28}$$

bietet sich das folgende Verfahren an: Die n-Tupel der Lagen q und der Impulse p faßt man als Vektoren $\underline{q}$ und $\underline{p}$ auf und läßt die Differentialquotienten auf den linken Seiten der Gleichungen (4.28) zu Differenzenquotienten werden:

$$\Delta \underline{q} = -\Delta t \cdot \operatorname{grad}_{\underline{p}}(-H(\underline{p},\underline{q})), \quad \Delta \underline{p} = -\Delta t \cdot \operatorname{grad}_{\underline{q}} H(\underline{p},\underline{q}). \tag{4.29}$$

Daraufhin führt man zu festen $\underline{p}_f$ und $\underline{q}_f$ die Impulsfläche $-H(\underline{p},\underline{q}_f)$ und die Ortsfläche $H(\underline{p}_f,\underline{q})$ ein; $\underline{p}$ und $\underline{q}$ dürfen variieren. Beide Flächen mögen zueinander konjugiert heißen.

Es seien nun eine spezielle Hamiltonfunktion $H(\underline{p},\underline{q})$ und Anfangswerte $\underline{p}_o$ und $\underline{q}_o$ vorgelegt. Dann konstruiert man die konjugierten Flächen mit $\underline{p}_f=\underline{p}_o$ und $\underline{q}_f=\underline{q}_o$ und markiert auf der Impulsfläche den Punkt $\underline{p}_o$ sowie auf der Ortsfläche $\underline{q}_o$ [1]. Durch diese Punkte legt man Verschiebungspfeile in Richtung der Fallinien, deren Längen dem Produkt aus Zeitzuwachs Δt und

[1] Die einander konjugierten Koordinatenachsen sollen parallel ausgerichtet sein.

Gefälle $|\mathrm{grad}_p H|$ bzw. $|\mathrm{grad}_q H|$ gleich sein sollen. Diese Verschiebungpfeile sind schließlich auf die jeweils konjugierte Fläche parallel zu übertragen und an ihren Endpunkten in $\underline{q}_o$ bzw. $\underline{p}_o$ anzuheften. Auf den Spitzen der Verschiebungspfeile liegen jetzt die neuen Anfangspunkte $\underline{q}_1$ und $\underline{p}_1$. Mit ihnen ist genauso zu verfahren wie zuvor mit $\underline{q}_o$ und $\underline{p}_o$. Hat man diese Prozedur hinreichend oft wiederholt, so findet sich durch Aneinanderreihung der Verschiebungspfeile die gesuchte Trajektorie. Kurz: Die Verschiebungspfeile erzeugen die Trajektorie in der konjugierten Fläche.

Falls die kinetische Energie nur von den Impulsen abhängt, vereinfacht sich das Verfahren sehr. Wegen $H(p,q)= T(p)+V(q)$ definiert man jetzt als Impulsfläche $-T(p)$ und als Ortsfläche $V(q)$, da die fortgelassenen Bestandteile $-V(q_f)$ bzw. $T(p_f)$ die nach (4.29) allein entscheidenden Gradienten nicht beeinflussen. Die modifizierte Definition hat den Vorteil, daß die konjugierten Flächen ein für allemal konstruiert werden können und nicht nach jedem Schritt zurechtgebogen werden müssen.

Wenn der Drehimpulssatz gültig ist, nimmt man der kinetischen Energie die Rotationsenergie weg und steckt sie in die potentielle Energie. Auf diese Weise entsteht das "effektive Potential", das bei der Veranschaulichung einfacher Streuprobleme [10] eine große Rolle spielt. Das effektive Potential ist also, nach der hier verwendeten Ausdrucksweise, eine spezielle Ortsfläche.

Auch die für das statische Tröpfchenmodell wichtigen Energieflächen sind spezielle Ortsflächen [61].

Für den streifenden Stoß zweier asymmetrischer Tröpfchen hängt die kinetische Energie aber auch von den Lagen ab. Als Impulsfläche sei also

$$-T(\underline{p},\underline{q}_f)=-\frac{u\kappa(a_f,r_f)}{2}p_a^2-u\lambda(a_f,r_f)\cdot p_a p_r-\frac{u\mu(a_f)}{2}p_r^2 \qquad (4.30)$$

und als Ortsfläche

$$T(p_f,q)=\frac{u\kappa(a,r)}{2}p_{af}^2+u\lambda(a,r)\,p_{af}p_{rf}+\frac{u\mu(a)}{2}p_{rf}^2+\frac{u\mu(a)\cdot L^2}{2r^2} \qquad (4.31)$$

(vgl. (4.5)) eingeführt. In den Abbildungen 18 und 19 sind zwei solche Flächen als Höhenschichtliniendiagramm dargestellt. Ihnen ist dieselbe 1-Lösung wie der Abbildung 17 zugrunde gelegt. Beide Bilder gehören zur Zeit t=0.1, sind also kurz nach der Berührung aufgenommen worden. Angenehmerweise unterscheiden sich die konjugierten Flächen späterer Zeitpunkte so geringfügig von den vorliegenden, daß man sie für eine qualitative Diskussion nicht benötigt.

Die Impulsfläche (Abb. 18) ist im vorliegenden Fall eine nach unten geöffnete parabolische Schale, deren Höhenschichtlinien geneigte Ellipsen sind. Nach (4.30) wird $T(\underline{p},q_f)=\epsilon$ in der Tat durch eine Ellipse mit den Achsen

$$max\sim\sqrt{2\epsilon/u\kappa}\,,\qquad min\sim\sqrt{2\epsilon/u\mu} \qquad (4.32)$$

und dem Drehwinkel [62]

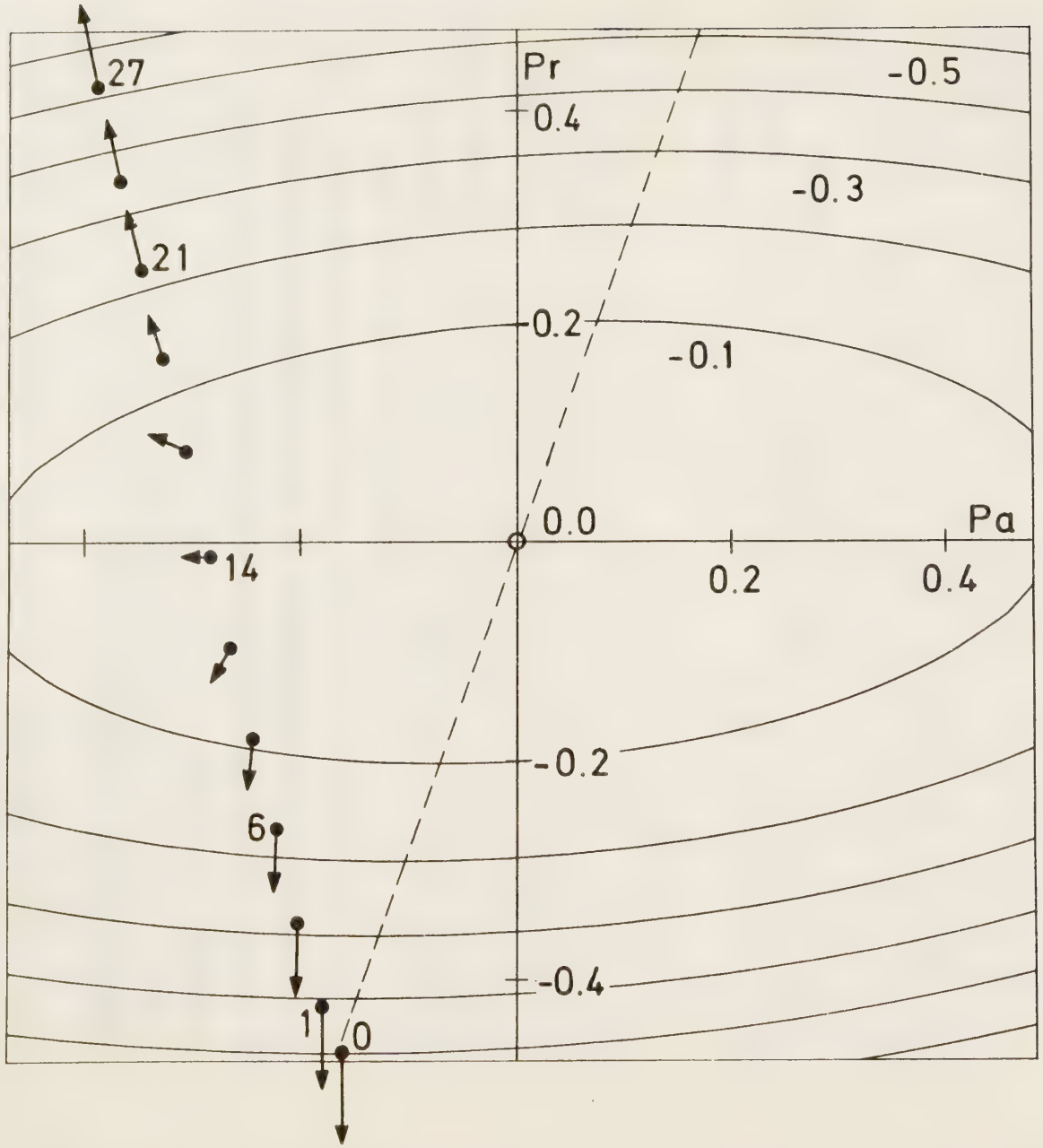
$$\delta\sim -u\lambda/u\mu \qquad (4.33)$$

dargestellt. Die Formeln (4.32) und (4.33) gelten wieder nur für den Grenzfall der schwachen Berührung, d.h. $u\kappa, u\lambda \ll u\mu$. Aus der Abbildung 12 entnimmt man, daß $u\lambda$ für positives a negativ ist, daß die Ellipse also im mathematisch positivem Sinn verdreht ist, was Abbildung 18 durchaus bestätigt.

Die Ortsfläche verblüfft durch ihre Einfachheit. Zwar muß sie außerhalb des Berührradius (angedeutet in Abbildung 19 durch eine gestrichelte Kurve) einfach sein, da dort die Ortsfläche nur aus

$$\frac{u\mu(a)}{2}p_{rf}^2+\frac{u\mu(a)\cdot L^2}{2r^2} \qquad (4.34)$$

(vgl. (4.31)) besteht. Es ist aber seltsam, daß sich diese Form der Ortsfläche, die man übrigens mit Hilfe von (4.34)



HMI-P-79-T-3014

Abb. 18: Impulsfläche der 1-Lösung. Die Höhenschichtlinien weisen auf Energien zwischen 0.0 und 0.5 hin. Die gepunktete Impulsbahn ist durch Zeiten in Einheiten von 10^{-23}s parametrisiert. Die gestrichelte Gerade ist das geometrische Abbild der Berührungsbedingung.

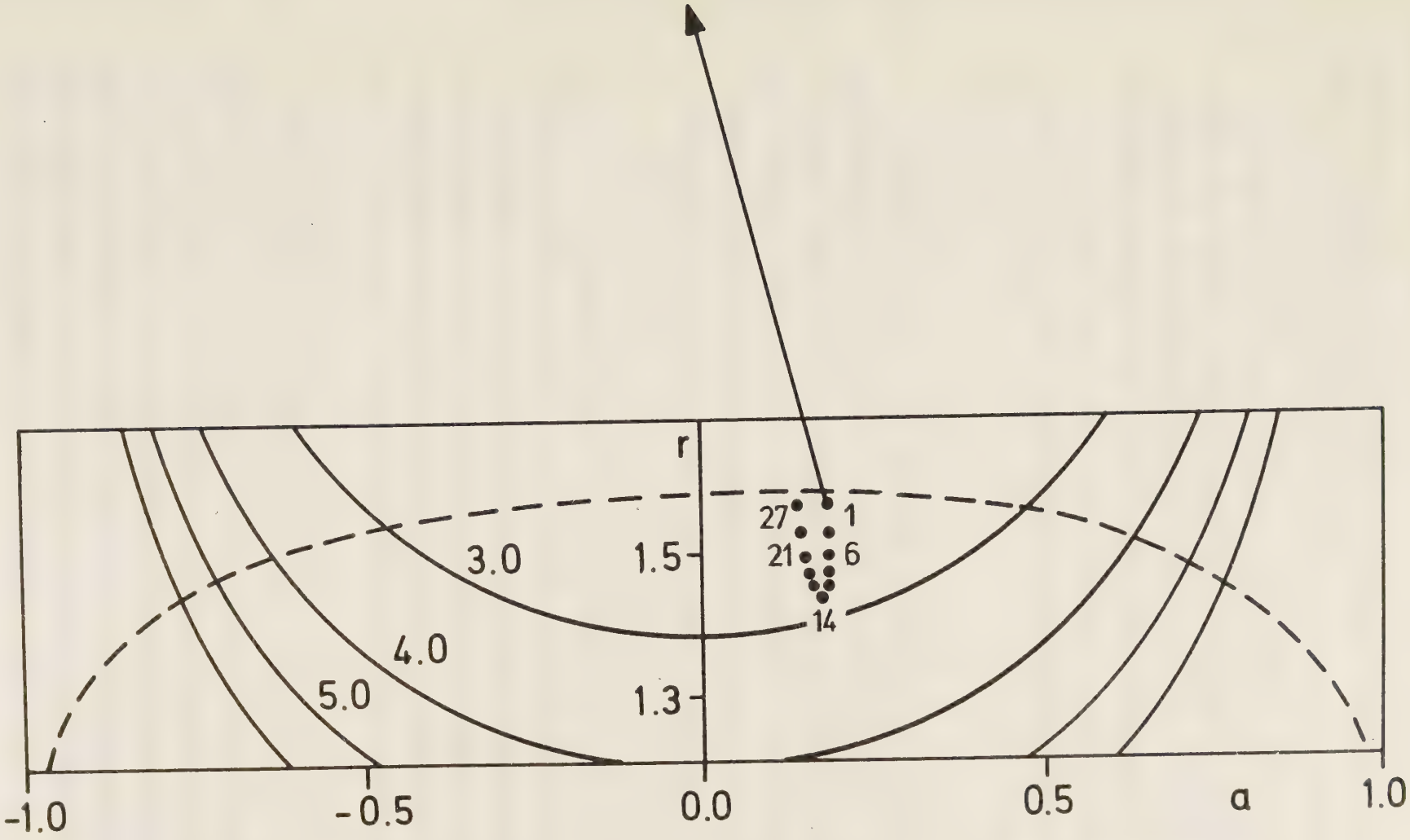


Abb. 19: Ortsfläche der 1-Lösung. Die Höhenschichtlinien repräsentieren Energien zwischen 3.0 und 6.0. Die Gesamtenergie des Systems beträgt 2.9 (vgl. S. 66). Die Punkte mit den daneben geschriebenen Zahlen deuten die Ortsbahn an, wie sie nach Überschreiten des gestrichelt eingezeichneten Berührradius in Einheiten von 10^{-23}s durchlaufen wird.

und Abbildung 13 sofort verstehen kann, über den Berührradius hinweg ohne Knicks, ohne Ausbildung einer in a unsymmetrischen Form fortsetzt (siehe dazu Abb. 11 und 12). Abbildung 16 liefert die Erklärung: Die Asymmetrieenergie ist so klein, daß sie gegenüber der Energie der Relativbewegung nicht ins Gewicht fällt. Darüber hinaus zeigt ein Vergleich der Höhenschichtlinien von Impuls- und Ortsfläche, die ja Energien messen, daß während der Reaktion fast die gesamte Energie in der Rotation steckt, wie es für streifende Stöße auch nicht anders sein kann.

Mit der unmerklich kleinen Unstetigkeit der Ortsfläche hängt auch das in Abschnitt 4.1.2 erwähnte scheinbare Fehlverhalten der 1-Lösung bei der Berührung zusammen. Ignorieren wir diese Unstetigkeit ganz, so bedeutet das für die Bewegungsgleichungen (4.6), daß auf den rechten Seiten dieser Gleichungen nur die von u_μ abstammenden Terme stehenbleiben dürfen. Nach (4.13) und (4.4) entwickeln sich die Impulse dann wie

$$p_a \sim p_a^0 + p_a^1 t, \quad p_r \sim p_r^0 + p_r^1 t, \quad p_{a,r}^{0,1} = \text{const.}$$

und aus der ersten Gleichung von (4.3) liest man damit $\dot{a} \propto t^{3/2}$ ab, denn die führenden Terme heben sich ja wegen der Berührungsbedingung (4.27) weg. Werden dagegen in (4.6) die zu u_κ und u_λ gehörigen Terme belassen, stellt sich, wenn auch nur für ganz kurze Zeit, das Verhalten $\dot{a} \propto t^1$ ein.

In die Ortsfläche ist die Ortsbahn (a(t),r(t)) gepunktet eingezeichnet. Wichtig ist nur, daß die Ortsbahn einen so kleinen Ausschnitt der Ortsfläche durchläuft, daß das Gefälle in der gesamten Umgebung der Bahn ungefähr konstant ist. Deshalb ist in Abbildung 19 nur ein repräsentativer Verschiebungspfeil eingezeichnet; alle anderen sind parallel und etwa gleich lang. Daraus folgt sofort, daß die Impulsbahn ($p_a(t)$, $p_r(t)$) in der Impulsfläche eine Gerade sein muß (vgl. Abb. 18).

Umgekehrt erzeugen die Verschiebungspfeile in der Impulsfläche die Ortsbahn. Aus den in Abbildung 18 eingezeichneten

Pfeilen setzt man sich leicht dem Verlauf der punktierten Kurve in Abbildung 19 zusammen.

Damit ist direkt mit der Hamiltonfunktion erklärt, welche Ursache die Asymmetrie zu kleineren Werten treibt. Es ist der Drehimpulswall $u\mu(a)\cdot L^2/(2r^2)$, welcher den Massentransfer und natürlich auch die Relativbewegung steuert.

Aufgrund der so gewonnenen Einsichten ist es nicht schwierig, Näherungslösungen von (4.3) und (4.6) in geschlossener Form anzugeben.

Auch der Sinn der Berührungsbedingung (4.27) sowie der in Abschnitt 4.1.2 besprochenen Trennung läßt sich geometrisch deuten. Vor der Berührung sieht die Ortsfläche genauso aus wie in Abbildung 19. In der Impulsfläche aber sind die Ellipsen zu Geraden entartet, die zur p_a-Achse parallel verlaufen. Denn aus $u\kappa=u\lambda=0$ folgt nach (4.32) und (4.33) ,daß die große Halbachse $\max=\infty$ ist und der Drehwinkel δ verschwindet. In einer solchen Impulsfläche gibt es nur Verschiebungspfeile in p_r-Richtung, und das heißt ja, daß die Asymmetrie sich nicht verändern kann. Berühren die Tropfen einander, so ziehen sich die Geraden zu Ellipsen zusammen und beginnen sich nach einem $t^{1/2}$-Gesetz zu drehen. Damit fangen auch alle Verschiebungspfeile zu rotieren an, ebenfalls nach einem $t^{1/2}$-Gesetz. Nur ein Strahl ist davon ausgenommen:

$$p_a=-\frac{u\lambda}{u\kappa}p_r=\frac{\lambda}{\mu}p_r\sim\frac{\lambda_0}{\mu_0}p_r^0. \qquad (4.35)$$

Auf diesem Strahl liegen nämlich alle Ellipsentangenten, welche parallel zur p_a-Achse verlaufen, so daß die auf diesen Tangenten senkrecht stehenden Verschiebungspfeile die rasante Drehung nicht mitmachen müssen. Da der Impuls p_r bei der Berührung einen festen Wert hat, ist p_a durch (4.35)=(4.27) eindeutig bestimmt.

Andererseits beherrscht die gerade beschriebene Rotation jeden Trennungsvorgang. Aus der Abbildung 18 ist nicht ein-

zusehen, auf welche Weise die Verschiebungspfeile am Ende der Rotation aufgerichtet werden, damit die Transfergeschwindigkeit á wieder verschwinden kann. Es geschieht indes so, daß die großen Achsen der Ellipsen sich ins Unendliche dehnen und sich dabei auf die p_a-Achse zurückdrehen.

Zur Kontrolle der bisher entwickelten Vorstellungen soll noch kurz der Verlauf der 1/2-Lösung (vgl. Abb. 17) besprochen werden. Die zugehörigen konjugierten Flächen sind in den Abbildungen 20 und 21 dargestellt und sprechen wohl für sich selbst. Daß die Ortsbahn nahezu symmetrisch verläuft, liegt an der Wahl des Anfangsimpulses p_a^o gemäß (4.19.1/2). Deswegen geht die Impulsbahn dicht am Ursprung der Impulsfläche vorbei, was eine symmetrische Verteilung der Verschiebungspfeile und somit eine symmetrische Ortsbahn erzeugt.

In Abbildung 20 ist zusätzlich die Gerade $p_r=p_r^o$ gestrichelt eingezeichnet. Derjenige Punkt, welcher die Berührungsbedingung (4.27) repräsentiert, ist durch ein Sternchen hervorgehoben. Mittels der Ellipsenrotation macht man sich leicht klar, daß alle Anfangswerte p_a^o, welche rechts des Kreises liegen, zu anfangs wachsender Asymmetrie führen, während ein p_a^o links des Sternchens die Asymmetrie noch stärker abnehmen läßt als bei der 1-Lösung. Die Asymmetriebewegung gleicht einem Pendel, welches nach rechts ausgelenkt obendrein von der Relativbewegung nach rechts oder links gestoßen wird. Unsere 1-Lösung entspricht der stoßfreien Pendelschwingung.

Damit sind alle am Anfang dieses Abschnitts aufgezählten Phänomene erklärt und wohl ein anschaulicher Einblick in die Mechanik der Tröpfchenreaktion gewonnen. Der kräftefreie Fall ist aber auch für den Ausbau des Reibungsmodells sehr lehrreich. Denn qualitativ wird sich dabei nicht mehr viel ändern.

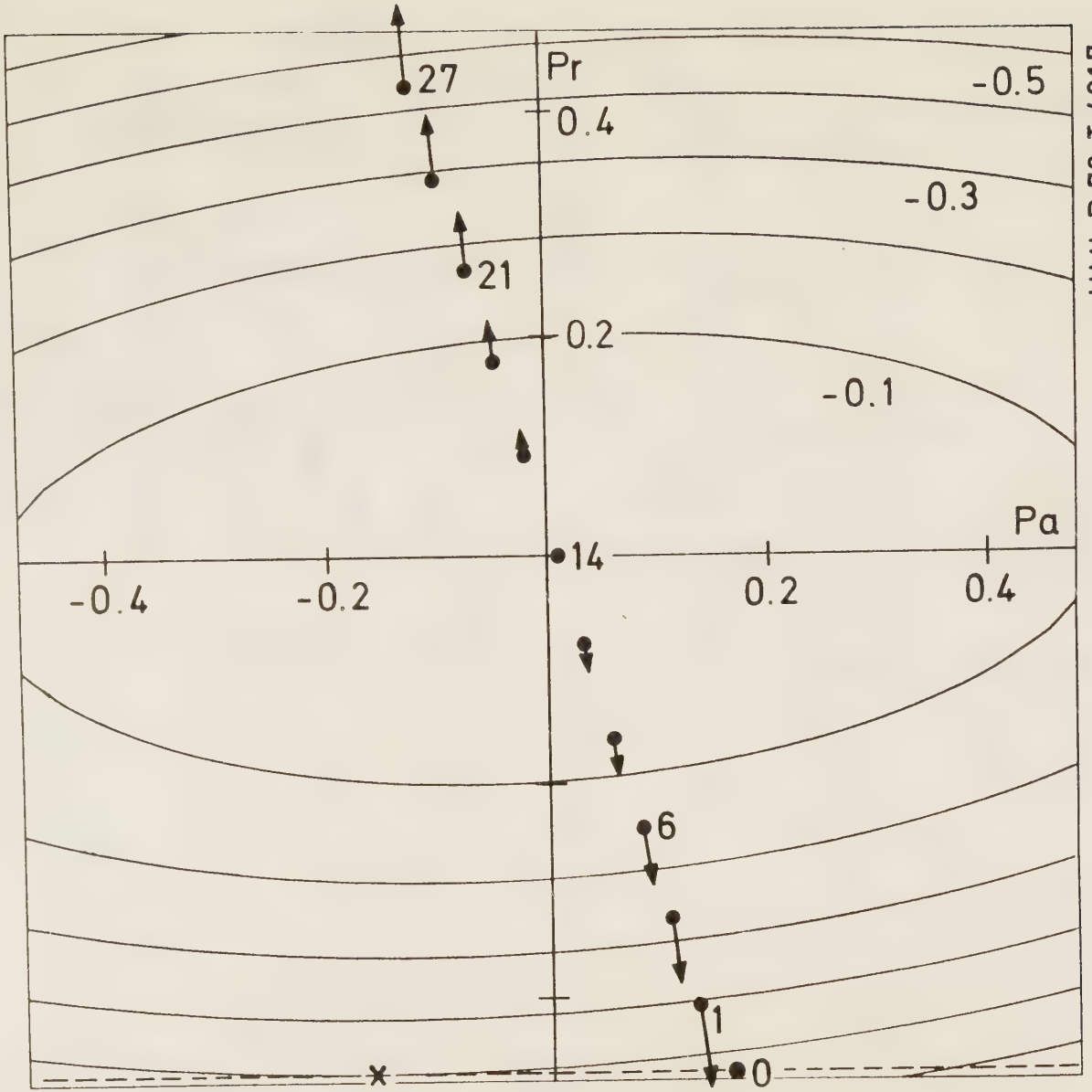


Abb. 20: Impulsfläche der 1/2-Lösung. Zur Beschriftung vergleiche Abb. 18. Gestrichelt ist hier die Gerade p_r=const., auf der alle Impulse bei der Berührung liegen müssen, selbst wenn Gleichung (4.23) mißachtet wird. Das Sternchen markiert die korrekte Berührungsbedingung.

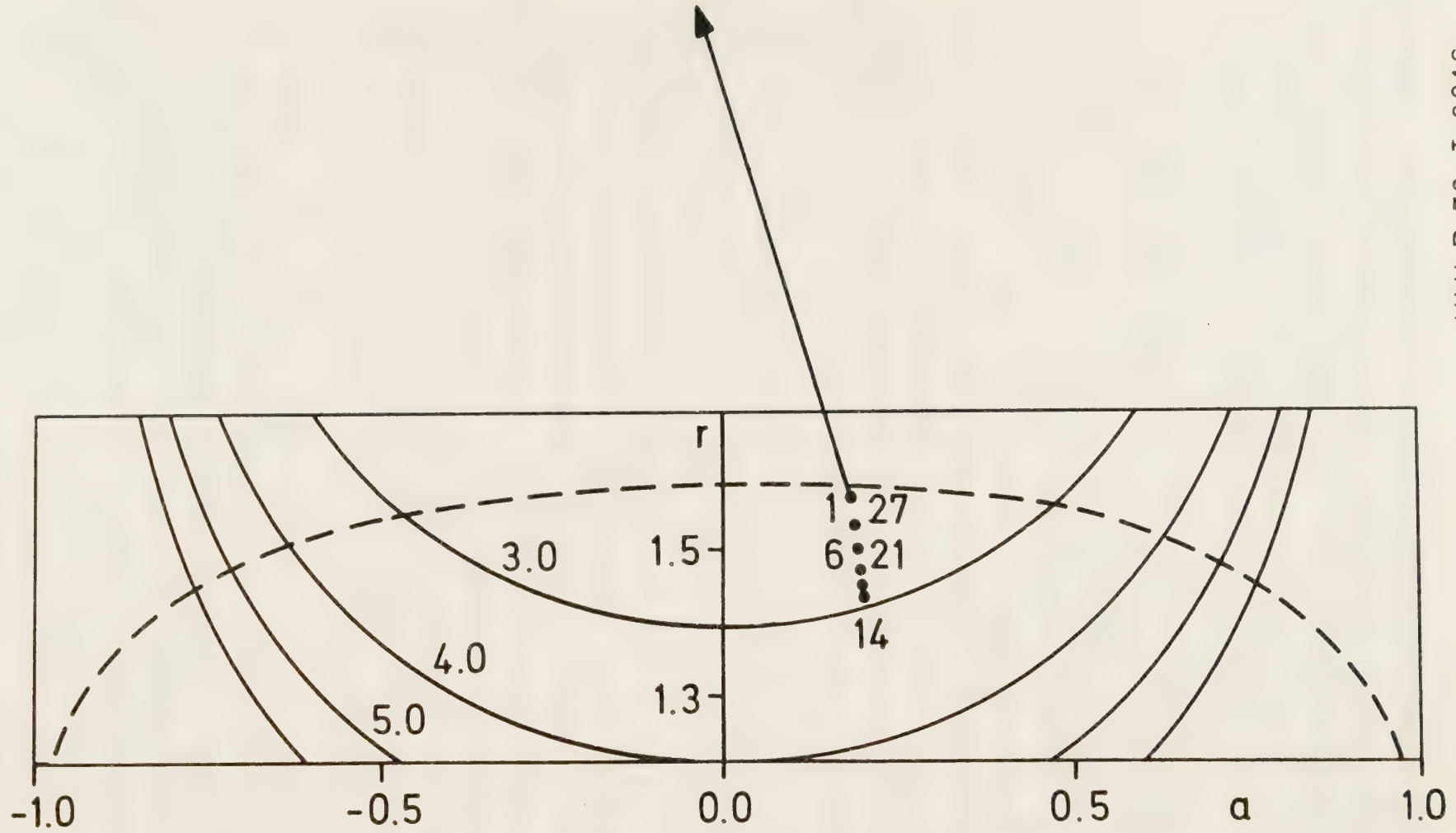


Abb. 21: Ortsfläche der 1/2-Lösung. Zur Beschriftung vergleiche Abbildung 19. Ein- und auslaufender Zweig der Ortslösung liegen in den Grenzen der Zeichengenauigkeit aufeinander.

4.2 Erweiterung des Reibungsmodells um den Massentransfer

4.2.1 Das Reibungsmodell von Groß und Kalinowski

Die hydrodynamische Theorie des Massentransfers soll auf tiefunelastische Reaktionen angewendet werden. Die kräftefreie Bewegung, so wie sie im Abschnitt 4.1 besprochen worden ist, unterscheidet sich aber noch zu sehr von derartigen Reaktionen, einmal weil die kräftefreie Bewegung ohne Energieverlust vor sich geht, zum zweiten, weil die Relativbewegung im kräftefreien Fall fast noch geradlinig ist; negative Winkel kommen nicht vor. Es ist also notwendig, die Energie durch Reibung abzuführen sowie durch eine Balance von Kernkräften einerseits und Coulomb- und Zentrifugalkräften andererseits dafür zu sorgen, daß sich Orbiting ausbilden kann.

Die zuletzt erwähnten Aspekte sind bisher am besten im Reibunsmodell von Groß und Kalinowski erfaßt. Dieses Modell beruht auf den Bewegungsgleichungen [10,63,64]

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) - \mu r\dot{\varphi}^2 - \frac{Z_T Z_p e^2}{r^2} + \frac{\partial V_n}{\partial r} + K_r\dot{r} = 0 \qquad (4.36)$$

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\varphi}) \qquad + K_\varphi r^2\dot{\varphi} = 0$$

r, φ Polarkoordinaten, μ reduzierte Masse,
$Z_T e$, $Z_p e$ Ladungen von Target und Projektil.

Die Besonderheit dieses Modells steckt in den Reibungskoeffizienten K_r und K_φ, die mit dem Kernpotential V_n durch

$$K_r := 4\cdot(\partial_r V_n)^2, \quad K_\varphi := 0{,}1\cdot(\partial_r V_n)^2 \qquad (4.37)$$

verknüpft sind. Das Kernpotential

$$V_n := -\ln\left(1+\exp\frac{R-r}{a}\right)\cdot(33-2(r-R)+3(r-R)^2)\ [\mathrm{MeV}], \qquad (4.38)$$

$$R := 1{,}3\cdot(A_T^{1/3}+A_p^{1/3})\ [\mathrm{fm}], \quad a := 0{,}61\ [\mathrm{fm}],$$

A_T, A_P Massenzahlen von Target und Projektil,

ist eine einfache Parametrisierung des von Groß und Kalinowski bevorzugten Folding-Potentials [10]. Die Differentialgleichungen (4.36) werden mit den Anfangsbedingungen für $t \to -\infty$

$$r \to \infty, \quad \varphi = 0, \quad \dot{r} = \sqrt{2E/\mu}, \quad \dot{\varphi} = L/(\mu r^2)$$

unter Vorgabe der Parameter A_T, A_P, Z_T, Z_P, E und L maschinell integriert.

Das Reibungsmodell von Groß und Kalinowski liefert in drei Punkten gute, auch quantitativ brauchbare Ergebnisse:

α. Für viele Reaktionen[1] ist das Band von Drehimpulsen, die zur Streuung in negative Winkel führen, breit genug, um die gemessenen Wirkungsquerschnitte für diesen Bereich zu erklären. Dabei ist es banal, daß überhaupt in negative Winkel gestreut wird; in fast jedem Reibungsmodell passiert das. Es kommt vielmehr darauf an, das eben erwähnte Drehimpulsband möglichst breit zu machen.

β. Die Breite dieses Drehimpulsbands variiert mit der Einschußenergie und den Stoßpartnern im Modell genauso wie in der Natur. Als Schlagwort: "Die Systematik stimmt."

γ. Die kritischen Drehimpulse, die die Fusionsbereiche begrenzen, stimmen durchweg mit den gemessenen Werten überein.

Es ist kennzeichnend, daß das Reibungsmodell keine Präzisionsresultate liefert sondern nur Faustwerte, die aber für Kerne aus dem gesamten Periodensystem in tiefunelastischen Reaktionen mit Einschußenergien zwischen 50 und 1000 MeV. In dieser Hinsicht ist das Groß-Kalinowski-Modell auch anderen ähnlichen Modellen überlegen. Insbesondere gilt das für Modelle, die auf dem Proximity-Theorem und Thomas-Fermi-Berechnungen beruhen [57,65,66].

---

[1] Bekanntestes Beispiel: Ar+Th(379MeV)

Nach den Vorteilen des Groß-Kalinowski-Modells sollen aber auch seine Unzulänglichkeiten zur Sprache kommen [63]. Da ist

δ. die Unmöglichkeit, mehrfach differentielle Wirkungsquerschnitte zu ermitteln,

ε. der zu gering berechnete Energieverlust der Reaktionen,

ζ. das ungewöhlich steile Potential (4.38), das für die elastische Streuung unbrauchbar ist,

η. der Ausschluß des Ladungs- und Massentransfers.

Verschiedene Autoren [20,21,67] versuchen, alle diese Probleme mit Diffusionsmodelle zu erledigen. Trotz einiger im einzelnen beachtenswerter Ergebnisse ist es ihnen aber noch nicht gelungen, die positiven Resultate von Groß und Kalinowski einzustellen. Im folgenden soll nur untersucht werden, ob der Mangel η. mit einem kollektiven Modell behoben werden kann. Dabei sollen Reibung und Kernpotential von Groß und Kalinowski in der Hoffnung übernommen werden, daß dadurch die Erfolge α.-γ. erhalten bleiben.

4.2.2 Bewegungsgleichungen, Anfangs- und Berührungsbedingungen

Da nun Reibung beschrieben werden soll, ist der Hamiltonsche Formalismus in Strenge nicht mehr anwendbar. Man prüft aber leicht nach, daß die Gleichungen

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\left(q,\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial \dot{p}}\right) \tag{4.39}$$

den Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art gänzlich entsprechen.

$$F(q,\dot{q}):=\frac{K(q)}{2}\dot{q}^2 \tag{4.40}$$

ist die Rayleighsche Dissipationsfunktion mit dem Reibungskoeffizienten K(q).

Die Hamiltonsche Funktion H setzt sich wie gewöhnlich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen. Die kinetische Energie ist (4.5) zu entnehmen, woraus in Gemeinschaft mit der ersten Gleichung von (4.39) folgt, daß (4.3) gültig bleibt. Die potentielle Energie besteht aus drei Teilen: dem Kernpotential V_n nach (4.38), dem Coulombpotential V_c und der Oberflächenenergie

$$V_0 = 4\pi\sigma \cdot l^2 \cdot \left\{ \left(\frac{1+a}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{1-a}{2}\right)^{2/3} \right\}, \qquad (4.41)$$

$l = 1.3(A_T+A_P)^{1/3}$ fm Radius des zugeordneten Compoundkerns,

$\sigma = 1.11\,\mathrm{MeV \cdot fm^{-2}}$ Oberflächenspannung [28].

(4.41) ist wieder nur für den Fall der schwachen Berührung richtig, hat aber den Vorteil, daß die Oberflächenenergie überhaupt nicht vom Mittelpunktsabstand r abhängt und somit nichts zu den attraktiven Kräften beiträgt, die ja alle durch das Kernpotential (4.38) vertreten sein sollen.

Das Coulombpotential muß außer der üblichen Wechselwirkung $Z_T Z_P e^2/r$ auch die Selbstwechselwirkungen der einzelnen Kugeltropfen enthalten [68]

$$V_c = \frac{Z_T \cdot Z_P e^2}{r} + \frac{3}{5l}\left\{ Z_T^2 \cdot \left(\frac{1+a}{2}\right)^{-1/3} + Z_P^2 \cdot \left(\frac{1-a}{2}\right)^{-1/3} \right\}, \qquad (4.42)$$

weil die Selbstenergien in der Näherung der schwachen Berührung zwar nicht vom Mittelpunktsabstand, wohl aber von der Asymmetrie abhängen und deshalb in die Bewegungsgleichungen eingehen. Die Ordnungszahlen von Target und Projektil Z_T und Z_P werden nicht vorgegeben, sondern nur ihre Summe Z_T+Z_P. Die Ordnungszahlen selbst stellen sich momentan so ein, wie es die Theorie des Ladungsausgleichs verlangt (vgl. Abschnitt 2.1). Z_T und Z_P sind also Funktionen von a.

Die Dissipationsfunktion ist wie bei Groß und Kalinowski [10]

$$F = \frac{K_r}{2}\cdot\dot{r}^2 + \frac{K_\varphi}{2}\cdot r^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \qquad (4.43)$$

Der Asymmetriefreiheitsgrad soll direkt also nicht gedämpft werden.

Damit ist alles zusammengestellt, was zur Berechnung der sechs Differentialgleichungen (4.39) erforderlich ist. Selbstverständlich bleiben die Anfangsbedingungen (4.7) in Kraft, aber auch die Berührungsbedingungen (4.27) bedürfen keiner Veränderung. Davon überzeugt man sich, indem man in den Energiesatzbetrachtungen von Abschnitt 4.1.2 den unveränderlichen Drehimpuls L durch eine zeitabhängige Funktion L(t) ersetzt und entsprechend die Energie E in E(t)-V(t) überführt. Mittels der naheliegenden Hypothese, daß L(t) und E(t)-V(t) stetig differenzierbare Funktionen seien, findet man wieder die Berührungsbedingungen (4.27). Grob gesprochen: Die Berührung ist ein derartig schneller Vorgang, daß in dem kurzen Zeitintervall kinetische Energie und Drehimpuls trotz Dissipation erhalten bleiben. Die letzte Gewißheit über die Richtigkeit der Berührungsbedingung ist wie in 4.1.2 durch eine Entwicklung der dynamischen Veränderlichen nach gebrochenen Potenzen der Zeit zu gewinnen.

Es gibt aber noch ein Problem, das erst durch den Einbau des Reibungsmodells entsteht: Groß und Kalinowski haben Potential und Reibung mit der Überzeugung konstuiert, daß die Kerne alle tiefunelastischen Prozesse im Bereich ihrer Diffuseness austragen. Dem steht hier ein Tröpfchenmodell mit scharfen Oberflächen gegenüber, dessen Charakteristikum der Berührradius ist. Dieser Berührradius muß im Bereich der Diffuseness der Kerne geeignet festgelegt werden. Skaliert man den Berührradius r_o durch

$$r_o = r_{el} \cdot 1{,}3 \cdot (A_T^{1/3} + A_p^{1/3}) \text{ [fm]}, \qquad (4.44)$$

so erweist sich rel=1,08 als vernünftige Wahl[1]. Dieser Punkt wird im folgenden Abschnitt erläutert.

---

[1] Für das Tröpfchenmodell wäre ein Nukleonenradius von 1.16fm angebracht. Dafür müßte aber in das Reibungsmodell eingegriffen werden. Diese Arbeit lohnt sich erst, sobald die experimentellen Daten in brauchbarer Form vorliegen (vgl. Abschnitt 4.2.3).

4.2.3 Die Reaktion Ar+Ni(280MeV)

Die im letzten Abschnitt vorgestellte allgemeine Theorie für tiefunelastische Prozesse mit Massentransfer ist auf einige Reaktionen (siehe 4.2.4) angewendet worden. Die Reaktion $^{40}Ar+^{58}Ni(280MeV)$ aber wurde, um ein Exempel zu statuieren, gründlicher untersucht. Dabei ging es um die Fragen, ob erstens die Relativbewegung durch den Massentransfer so stark gestört wird, daß die Erfolge des Reibungsmodells (vgl. 4.2.1, $\alpha.-\gamma.$) zunichte gemacht werden, was zweitens an der kräftefreien Bewegung durch Potentiale und Reibung verändert wird, und drittens, welche meßbaren Größen durch unsere Theorie des Massentransfers der Berechnung zugänglich gemacht werden. Die Reaktion Ar+Ni(280MeV) wurde ausgewählt, weil es sich um zwei mittelschwere Kerne handelt, die einerseits schon so viele Nukleonen enthalten, daß Einzelteilcheneffekte in den Hintergrund treten dürften, die andererseits aber noch so fest gebunden sind, daß starke Deformationen während der Reaktion nicht befürchtet werden müssen. Darüber hinaus ist Ar+Ni(280MeV) eine typische Orbiting-Reaktion, deren Berechnung erfahrungsgemäß besonders leicht mißlingt.

Abbildung 22 vergleicht Ablenkfunktionen $\Theta(L)$ und Energieverluste $E_{loss}(L)$ für Streuung mit und ohne Massentransfer. Während die Energieverluste nahezu übereinstimmen, ist die Ablenkfunktion für den Massentransfer deutlich zu kleineren Drehimpulsen hin versetzt. Die Ursache ist bereits im Abschnitt 4.1.3 geklärt worden: Die Asymmetriebewegung entzieht der Relativbewegung Energie, die dann beim Steigen am Drehimpulswall fehlt. Es ist bloß unklar, weshalb dieser Effekt, der bei der kräftefreien Bewegung kaum zu sehen war (vgl. Abb. 17), hier so deutlich zutage tritt. Die Asymmetrieenergie (siehe Abb. 16) erreicht jedenfalls wieder nur einen Prozentanteil der Gesamtenergie. Die Aufklärung dieses Widerspruchs findet sich in Abbildung 23 und der dazugehörigen kleinen Tabelle: Das Orbiting ist eine derart unstabile Bewegungsform, daß bereits winzige Störungen die Trajektorie merklich verformen.

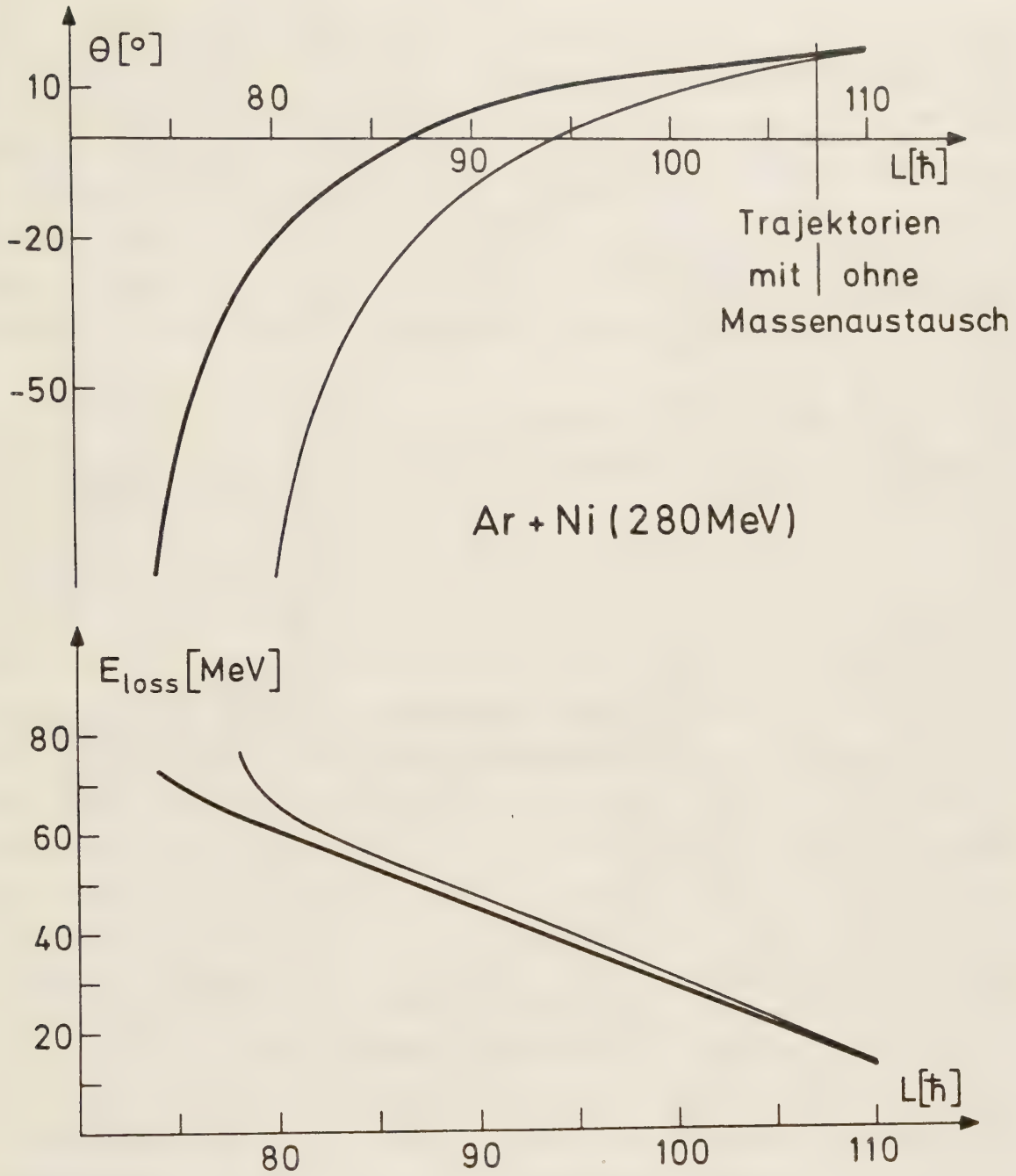
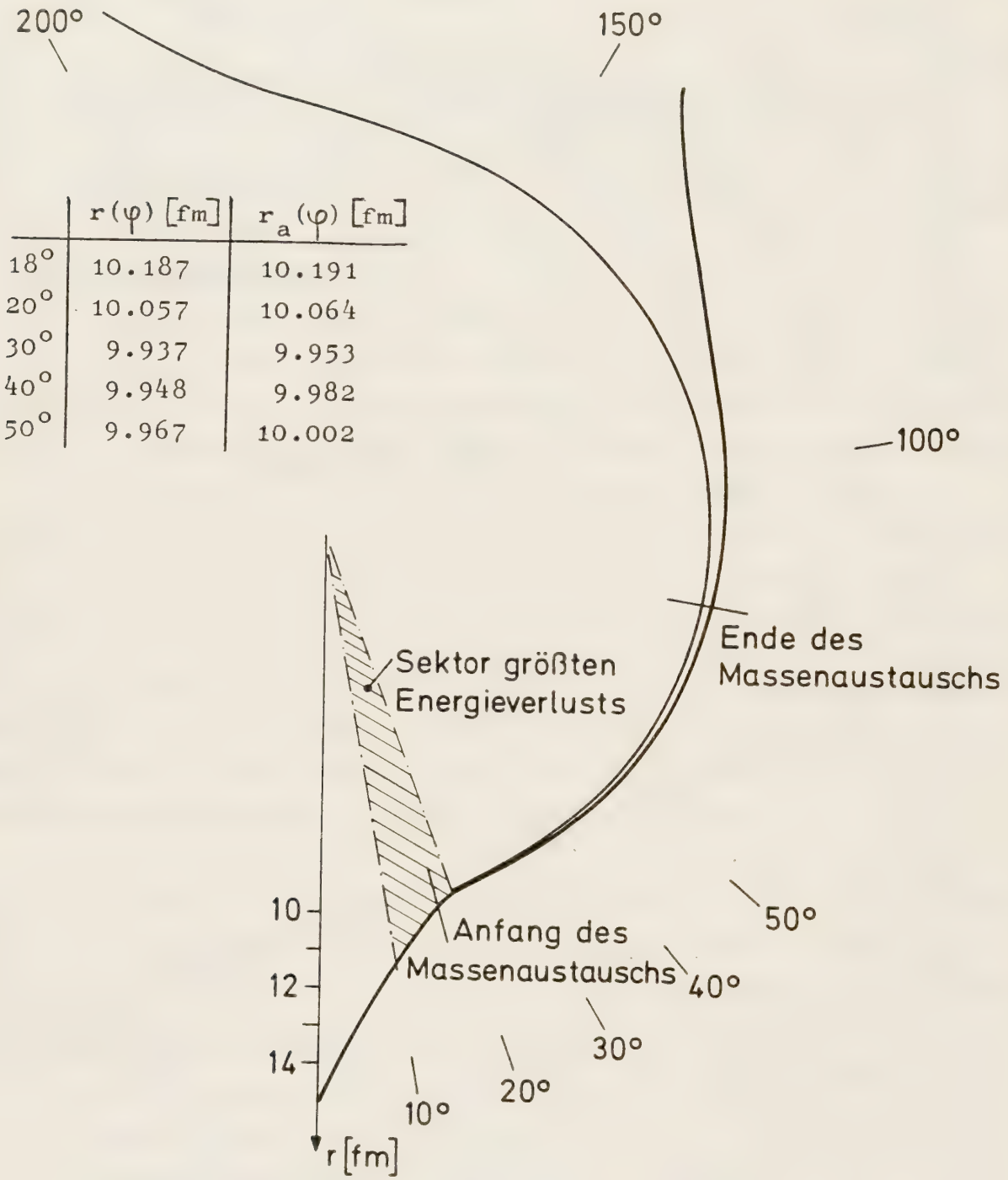


Abb. 22: Ablenkfunktion und Energieverlust. Stark ausgezogen sind die Kurven bei eingeschal - tetem Massenaustausch. Nur Trajektorien mit einem Drehimpuls L≲107ħ überschreiten den Berührradius.



	r(φ) [fm]	$r_a(\varphi)$ [fm]
18°	10.187	10.191
20°	10.057	10.064
30°	9.937	9.953
40°	9.948	9.982
50°	9.967	10.002

Abb. 23: Orbiting von $^{40}Ar+^{58}Ni$(280MeV), Drehimpuls L=75ħ. Stark ausgezogen ist die Trajektorie mit Massenaustausch $r_a(\varphi)$. Zum Vergleich ist die austauschfreie Bahn $r(\varphi)$ eingetragen. Zur Ergänzung der Zeichnung demonstriert die Tabelle, aus welch winzigen Unterschieden die zum Schluß beträchtliche Aufgabelung herauswächst.

Indessen bedeutet eine Verschiebung der Ablenkfunktion um etwa 6ħ keine Verschlechterung des Reibungsmodells. Der experimentell bestimmte kritische Drehimpuls $L_{krit} \approx 73\hbar$ [64, Tab. 18] liegt sogar näher an dem unter Einschluß des Massentransfers berechneten Wert $L_{krit} \approx 72\hbar$. Man wird also sagen dürfen, daß der Massentransfer die Vorzüge des Reibungsmodells nicht zerstört, auch wenn dieser Satz wird im nächsten Abschnitt vorsichtiger formuliert werden müssen.

Die wichtigste Feststellung bei der Theorie der kräftefreien Bewegung war, daß die Rotationsenergie den gesamten Stoß dynamisch beherrscht. Um die Verhältnisse beim Orbiting zu überprüfen, vergleiche man Abbildung 25 mit Abbildung 24. Die letztere zeigt nur die statischen Potentiale $V_n+V_c+V_o$, (4.38), (4.42) und (4.41). Bemerkenswert ist, daß das Potential in der Umgebung des Berührradius, in dessen Nähe das System wegen der Reibung lange Zeit verharrt, ein Maximum für a=0 aufweist und für zunehmendes a fällt. Dieses Verhalten geht auf die Oberflächenenergie V_o zurück, die ja den größeren der beiden Kerne auf Kosten des kleineren aufzublähen trachtet. Abbildung 25 ist eine richtige Ortsfläche im Sinn des Abschnitts 4.1.3. Der Drehimpuls ist L=75ħ, das System hat gerade die Berührung überwunden. Diese Ortsfläche unterscheidet sich vom Potential im wesentlichen nur durch den Drehimpulswall. Dessen Beitrag ist aber so groß, daß er die Fläche regelrecht umkrempelt: Das Maximum wird in einen Sattel verwandelt, so daß die Ortsfläche in der Umgebung des Berührradius so ähnlich wie in den Abbildungen 19 und 21 aussieht. Daraus sind zwei Schlüsse zu ziehen, die auch für die Reaktionen im Abschnitt 4.2.4 gelten und sogar ganz allgemeine Kennzeichen für streifende Stöße mit hinreichend hohen Energien sind. Erstens: Die Trägheitseffekte dominieren, und zweitens: Die Asymmetrie nimmt im Lauf der Reaktion stets ab[1].

Abbildung 26 zeigt diejenige Größe, welche mit unserem

[1] Ob für extrem asymmetrische Reaktionen (z.B. N+Ag) doch wieder die Oberflächenspannung dominiert [13], bleibt zu untersuchen.

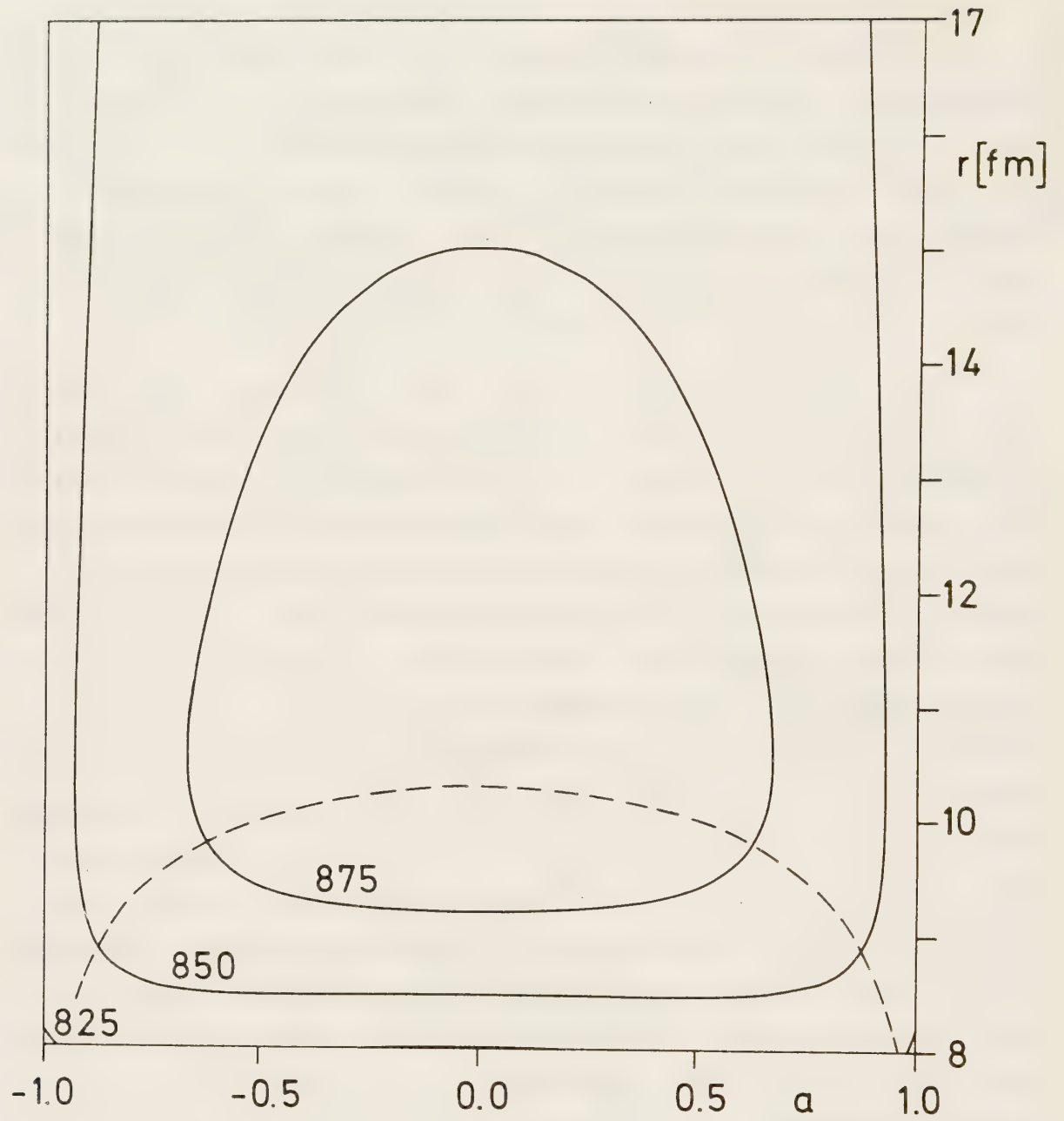


Abb. 24: Die statischen Potentiale $V_n+V_o+V_c$ als Höhenschichtliniendiagramm über der Asymmetrie a und dem Mittelpunktsabstand r. Die Energien an den Höhenschichtlinien sind in MeV angegeben. Sie sind wegen der einbezogenen Oberflächenenergie und der Coulombschen Selbstenergien so hoch. Unterhalb von r=8fm fällt die Potentialfläche sehr steil ab.

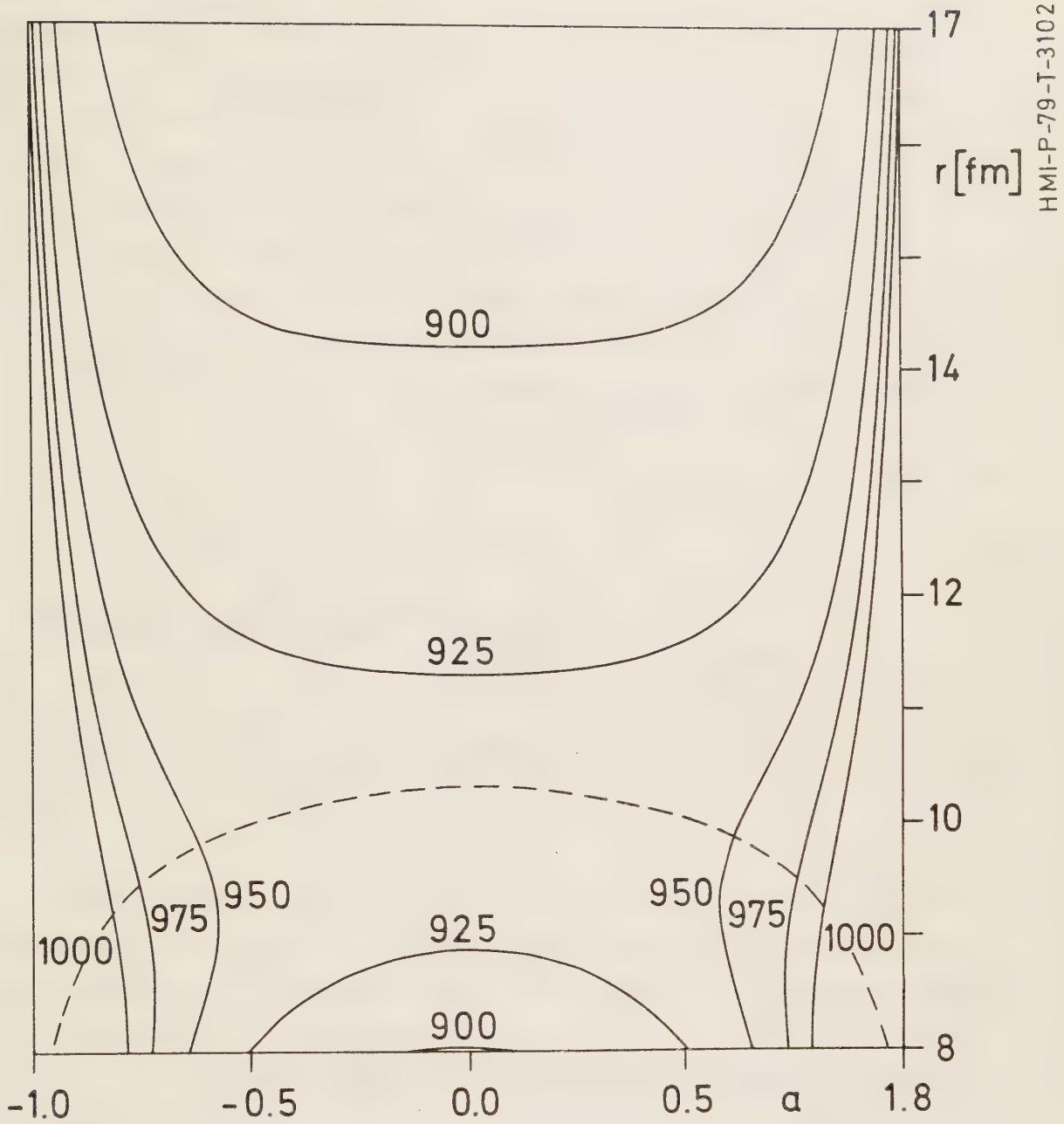
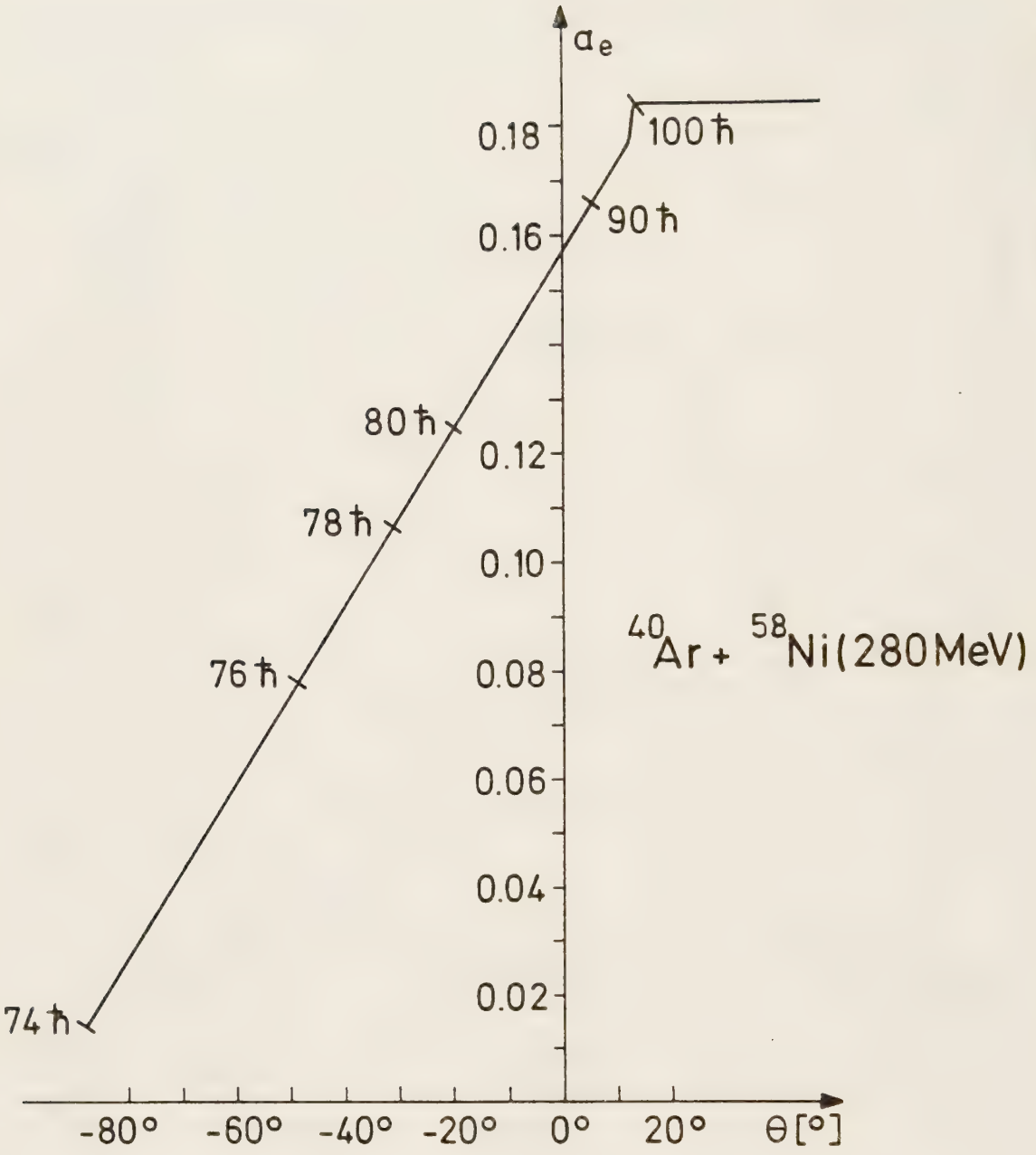


Abb. 25: Ortsfläche für $^{40}Ar+^{58}Ni$(280MeV), L=75ħ, kurz nach der Berührung. Zur Beschriftung vergleiche Abbildung 24.



HMI-P-79-T-4018

Abb. 26: Asymmetrie der Reaktionsprodukte a_e in Abhängigkeit vom Streuwinkel. Durch Querstriche sind diejenigen Drehimpulse markiert, deren Trajektorie den Punkt im Diagramm geliefert hat.

Modell unmittelbar berechnet werden kann und die auch vom Experiment her großes Interesse verdient. Es ist die Asymmetrie der Reaktionsprodukte in Abhängigkeit vom Streuwinkel Θ. Experimentell kann $a_e(\Theta)$ aus den Schwerpunkten der Massenverteilungen bestimmt werden. Die Größe $a_e(\Theta)$ ist besonders brauchbar, weil sie die experimentell unzugängliche Reaktionszeit nicht enthält[1]. $a_e(\Theta)$ ermöglicht zusammen mit der Ablenkfunktion $\Theta(L)$ die Berechnung von Erzeugungsquerschnitten für die verschiedenen Massen. Dazu liest man aus einem $a_e(L)$-Diagramm denjenigen Drehimpulsbereich $L_{\underline{A}} \leq L \leq L_{\overline{A}}$ ab, in welchem Kerne mit der Massenzahl A erzeugt werden. Der Erzeugungsquerschnitt für die Masse A berechnet sich dann aus

$$\sigma_A = \frac{\pi\hbar^2}{2\mu E}\left(L_{\underline{A}}^2 - L_{\overline{A}}^2\right), \tag{4.45}$$

E: Gesamtenergie im Schwerpunktsystem.

Die Übertragung dieser Formel auf Ordnungszahlen Z ist problemlos, da Massen- und Ordnungszahl jedes Reaktionsprodukts wegen des Ladungsausgleichs eindeutig miteinander verkoppelt sind.

Es hat aber keinen Zweck, Arbeit in die Berechnung der Erzeugungsquerschnitte zu stecken, bevor die Brauchbarkeit des hydrodynamischen Modells nicht anhand der Größe $a_e(\Theta)$ erwiesen ist. Leider geben experimentelle Arbeiten zur Zeit keine leicht vergleichbaren Meßwerte an, sondern unter dem Einfluß der Diffusionsmodelle Driftgeschwindigkeiten, in die aber immer problematische Annahmen über die Reaktionszeiten eingehen. Doch gestattet das hydrodynamische Modell auch die Berechnung von Größen, die mit den angegebenen Driftgeschwindigkeiten verglichen werden können. In Abbildung 27 ist die Asymmetrie der Reaktionsprodukte a_e über der Reaktionsdauer τ aufgetragen[2]. Die Kurve $a_e(\tau)$ ist zum größten Teil eine

---

[1] Ebenso einfach kann die Asymmetrie der Produkte als Funktion des Energieverlusts berechnet werden, eine Abhängigkeit, die in fokussierenden Reaktionen experimentell leicht zugänglich ist.

[2] Derartige Diagramme dürfen nicht mit der Darstellung von a(t) wie in Abbildung 17 verwechselt werden.

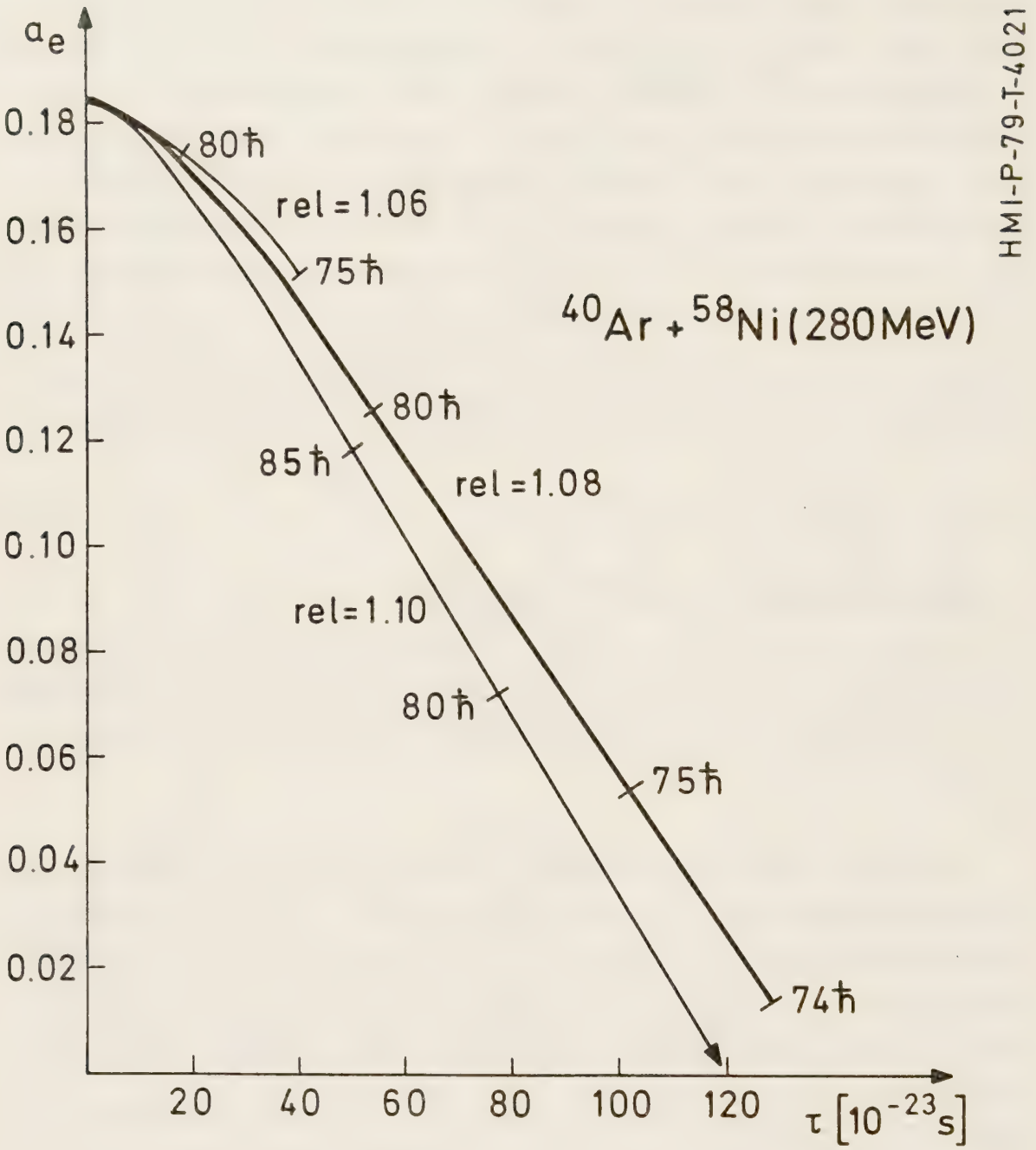


Abb. 27: Asymmetrie der Reaktionsprodukte a_e in Abhängigkeit von der Reaktionsdauer τ. Die Kurve zu rel=1.10 erreicht bei $\tau=183\cdot10^{-23}$s den Wert $a_e=-0.12$ und bricht dann wegen Fusion ab. Für rel≤1.05 gibt es keinen Massenaustausch mehr.

Gerade, deren Steigung "Reaktionsrate" heißen möge.

Aus Abbildung 27 kann auch die Bedeutung der Skalierungsgröße rel aus Gleichung (4.44) abgelesen werden. Die Steigungen der $a_e(\tau)$-Kurven sind für rel=1.06 bis rel=1.10 nicht bedeutend unterschiedlich, wohl aber die Reaktionsdauern, die zu den einzelnen Trajektorien gehören. rel=1.08 wurde ausgewählt, weil sich Reaktionsdauern ergeben, die gängigen Vorstellungen entsprechen.

4.2.4 Reaktionsraten in verschiedenen Systemen

Das hydrodynamische Modell soll nun einer ersten Prüfung unterzogen werden, ob es auf tiefunelastische Reaktionen anwendbar ist. Dazu sind drei Reaktionen untersucht worden. $^{40}Ar+^{109}Ag(288MeV)$ ist nach der Klassifizierung von Galin [1] ein typischer Orbiting-Fall, $^{136}Xe+^{209}Bi(1130MeV)$ ist eine stark fokussierende Reaktion, während $^{86}Kr+^{197}Au(620MeV)$ zwischen beiden Typen liegt. In Abbildung 28 sind die $a_e(\tau)$-Abhängigkeiten aller drei Reaktionen zusammengefaßt.

Für diese drei Reaktionen haben Nörenberg und Wolschin [69] Driftgeschwindigkeiten bestimmt, die sie für modellunabhängig halten und deshalb als v_A^{exp} bezeichnen. Natürlich enthält das Verfahren von Nörenberg und Wolschin willkürliche Annahmen über die Form der Trajektorien; wir wollen hier aber davon ausgehen, daß ihre "experimentellen Driftgeschwindigkeiten" wenigstens größenordnungsmäßig stimmen. Die Driftgeschwindigkeiten rechnen sich in folgender Weise auf Reaktionsraten um: Nach Nörenbergs Diffusionstheorie ist

$$A_p(\tau) = A_p(0) + v_A \cdot \tau, \quad A_T(\tau) = A_T(0) - v_A \cdot \tau. \tag{4.46}$$

Andererseits gilt aufgrund der Definition der Asymmetrie

$$a_e(\tau) = \frac{A_T(\tau) - A_p(\tau)}{A_T + A_p} = a_0 - \frac{2v_A}{A_T + A_p} \cdot \tau. \tag{4.47}$$

HMI-P-79-1-3012

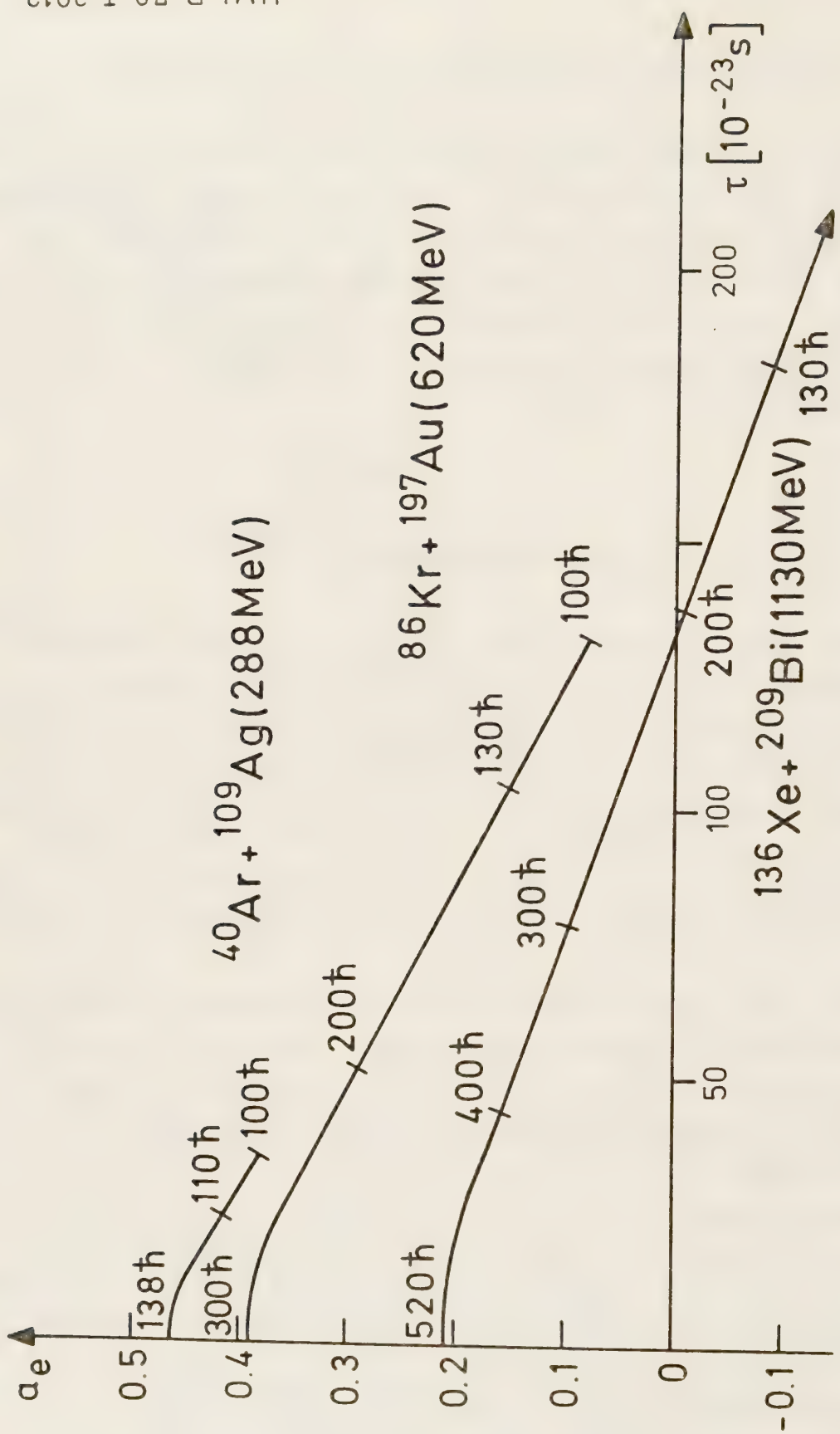


Abb. 28: Asymmetrie der Reaktionsprodukte a_e in Abhängigkeit von der Reaktionsdauer τ. Die Kurven brechen bei den experimentell bestimmten kritischen Drehimpulsen ab.

Daraus folgt als Differenzenquotient

$$\frac{\Delta a_e}{\Delta \tau} = -\frac{2 v_A}{A_T + A_p}, \qquad (4.48)$$

die Reaktionsrate.

Obwohl die Abbildungen 27 und 28 nicht mit Hilfe eines Diffusionsmodells zustande gekommen sind, geben sie die Endasymmetrien a_e als im wesentlichen lineare Funktionen der Reaktionsdauer wieder. Abhängigkeiten der Form (4.46) beweisen also das Diffusionsmodell nicht [67].

Die aus den Abbildungen 27 und 28 abgelesenen Steigungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt und mit den von Nörenberg und Wolschin ermittelten experimentellen Reaktionsraten verglichen (Zeiteinheit 10^{-23}s).

Reaktion	$\Delta a_e/\Delta\tau^{exp}$	$\Delta a_e/\Delta\tau^{hyd}$	a_o
$^{40}Ar+^{109}Ag(288MeV)$	$-2.4\ 10^{-4}$	$-2.9\ 10^{-3}$	0.46
$^{86}Kr+^{197}Au(620MeV)$	$-5.2\ 10^{-4}$	$-2.6\ 10^{-3}$	0.39
$^{136}Xe+^{209}Bi(1130MeV)$	$-2.0\ 10^{-4}$	$-1.8\ 10^{-3}$	0.21
$^{40}Ar+^{58}Ni(280MeV)$	———	$-1.5\ 10^{-3}$	0.18

In den vergleichbaren Fällen stimmt die Reaktionsrichtung überein: Stets nimmt die Asymmetrie ab. Doch sind die hydrodynamischen Reaktionsraten $\Delta a_e/\Delta\tau^{hyd}$ durchweg um eine Größenordnung zu hoch. Das ist, wie sich im nächsten Abschnitt herausstellen wird, kein Grund zur Beunruhigung.

Aus der Tabelle ist eine Gesetzmäßigkeit abzulesen, die für das hydrodynamische Modell charakteristisch ist: Die Reaktionsrate $\Delta a_e/\Delta\tau^{hyd}$ wächst mit zunehmender Anfangsasymmetrie a_o. Der Grund dieser Gesetzmäßigkeit ist aus der Ortsfläche (Abb. 25) zu ersehen: Je größer a_o, desto steiler ist diejenige Stelle des Drehimpulswalls, an welchem das System startet, und desto schneller ändert es seine Asymmetrie.

Damit hängt eine Eigenart stark asymmetrischer Systeme zusammen. Der Massenaustausch verschiebt den kritischen

Drehimpuls zu beträchlich kleineren Werten hin. So wandert in der Reaktion Ar+Ag(288MeV) L_{krit} von 100ħ nach 60ħ. Auf dieses unerfreuliche Verhalten kommen wir im folgenden Abschnitt zurück.

4.2.5 Verbesserungsvorschläge

Es dürfte kaum Schwierigkeiten machen, die Reaktionsraten zu erniedrigen. Dazu multipliziert man die Masse κ mit einem Skalierungsfaktor $s \approx 10$. Genauso wie eine leichte Billiardkugel beim Stoß die schwere kaum in Bewegung versetzt, und auch die übertragene Energie um so kleiner ist, je mehr sich die Massen der Kugeln unterscheiden, genauso bewirkt eine Vergrößerung der Masse κ eine Verringerung der Asymmetriegeschwindigkeit und sogar der Energie der Asymmetriebewegung. Eine geringere Asymmetrieenergie ist deshalb willkommen, weil sich damit die Verschiebung des kritischen Drehimpulses vermindert (vgl. Abschnitt 4.2.3)[1]. Daß der Stoß der Billiardkugeln nicht bloß eine aus der Luft gegriffene Analogie ist, entnimmt man der Abbildung 18: Wenn κ wächst, streckt sich die große Achse max und der Drehwinkel δ nimmt ab (vgl. (4.32) und (4.33)). Die Impulsbahn bleibt weitgehend unverändert, doch weisen die Verschiebungspfeile kleinere Asymmetriekomponenten auf.

Es ist nicht ungewöhnlich, daß hydrodynamisch berechnete Trägheitsparameter für Anwendungen in der Kernphysik zu klein sind. Dieselbe Erscheinung ist von den Rotationen und Oberflächenschwingungen der Kerne her bekannt [70,71]. Dennoch benutzt man die hydrodynamischen Trägheitsparameter, weil sie wichtige Abhängigkeiten richtig wiedergeben.

---

[1] Anmerkung bei der Durchsicht: Diese Modifikation ist inzwischen erprobt. Die Reaktionsraten werden auf das richtige Maß reduziert, und die Ablenkfunktionen unterscheiden sich in allen Fällen kaum noch von denen des Reibungsmodells.

Die Einführung einer starken Reibung proportional zur Asymmetriegeschwindigkeit ist unsinnig, da man dadurch die Asymmetrieenergie in ein "Faß ohne Boden" verwandelte und so das Orbiting völlig unterdrückte.

Eine andere wichtige Verbesserung wäre die Beseitigung des Mißverhältnisses zwischen dem Tröpfchenmodell mit der scharfen Oberfläche und dem Reibungsmodell mit durchweg stetigen Übergängen. Eine Möglichkeit bestände darin, den am Berührungsradius abrupt verschwindenden inversen Trägheitsparametern u_κ und u_λ exponentielle Schwänze anzuheften, um dadurch Berührung und Trennung aufzuweichen. Abgesehen davon, daß durch eine solche Maßnahme neue anzupassende Parameter ins Spiel kommen, spricht der Erfolg des Groß-Kalinowski-Modells gegen eine weiche Berührung. Denn das Kernpotential (4.38) zeichnet sich durch eine außerordentliche Steilheit am Kernrand oder, anders gesagt, durch eine sehr dünne Oberflächenschicht aus. In der Reibung (4.37) wird diese Schicht noch einmal halbiert. De und Mitarbeiter [72] verwenden für die Kernanziehung das allgemeiner nutzbare Krappe-Nix-Potential; sie sind dann aber gezwungen, eine Reibung proportional zu $(\partial_r V_n)^4$ einzusetzen, was auf eine drastische Verkürzung der Reichweite der Reibung hinausläuft. Behält man das Kernpotential (4.38) bei, verkürzt aber die Reichweite der Reibung über (4.37) hinaus, so ergeben sich in allen drei Punkten $\alpha.$-$\gamma.$ aus Abschnitt 4.2.1 noch bessere Resultate als bei Groß und Kalinowski. Zwar gibt Groß eine Begründung der Formeln (4.37) mit Hilfe der Diracschen Störungsrechnung, doch sind seine Rechnungen nicht so streng, daß man durch sie gebunden wäre: Es ist kaum vorstellbar, wie die Oberflächenschicht Hunderte von MeV aufnehmen soll, ohne sich beträchtlich zu verändern.

Je mehr Freiheitsgrade in das Modell eingezogen werden, desto dringender wird die Forderung nach einer extrem kurzreichweitigen Reibung. Denn jeder Freiheitsgrad wirkt auf die Relativbewegung wie eine störende Kraft und vermindert so das Orbiting.

In Abbildung 29 wird noch einmal die doppelte Funktion der kurzreichweitigen Reibung klar: Erstens vernichtet sie Energie, und zweitens fixiert sie die Relativbewegung für lange Zeit nahe dem Maximum des effektiven Potentials. Je weniger das Maximum mit wachsendem Drehimpuls wandert, desto mehr Trajektorien können spiralen. Das Maximum des effektiven Potentials hängt aber um so schwächer vom Drehimpuls ab, je steiler das Kernpotential am Kernrand abfällt.

Ein schlagartiger Energieverlust am Bremsradius r_{br} bringt also optimales Orbiting hervor. Doch ist die Vorstellung eines totalen Energieverlusts der Radialbewegung am Bremsradius nicht haltbar. Wie aus Abbildung 29 ablesbar ist, bedeutete das nämlich, daß der kritische Drehimpuls oberhalb einer gewissen Energie konstant bliebe [73] - im Widerspruch zu den experimentellen Befunden, wo der kritische Drehimpuls mit der Energie wächst, wenn auch im Regelfall schwächer als im Groß-Kalinowski-Modell [10].

Die Radialbewegung soll also nur x Prozent ihrer Energie am Bremsradius verlieren. Darüber hinaus sollen Bremsradius und Berührradius zusammenfallen und etwa den Wert $1.2(A_T^{1/3}+A_P^{1/3})$[fm] erhalten. Auf diese Weise würde der unbekannte Formfaktor der Reibung durch einen anzupassenden Parameter, nämlich x, ersetzt. Zudem gewönne man durch die härtere Reibung Spielraum für die Verwendung gebräuchlicherer Potentiale.

Nach einer Idee von Krappe wäre es wünschenswert, das vorliegende hydrodynamische System einer semiklassischen Behandlung [74] zu unterziehen, um Quanteneffekte beschreiben zu können. Die Asymmetrie a wäre in diesem Fall die Wirkungsvariable, der kanonische Impuls p_a die Winkelvariable. p_a dürfte dann aber nicht mehr festliegen, wie es die Berührungsbedingungen (4.27) verlangen. Es ist eine offene Frage, ob durch den Einfluß zusätzlicher Mechanismen, die außerhalb des Gültigkeitsbereichs der klassischen Hydrodynamik liegen, p_a doch wieder einen gewissen Freiraum erhält. Solche Mechanis-

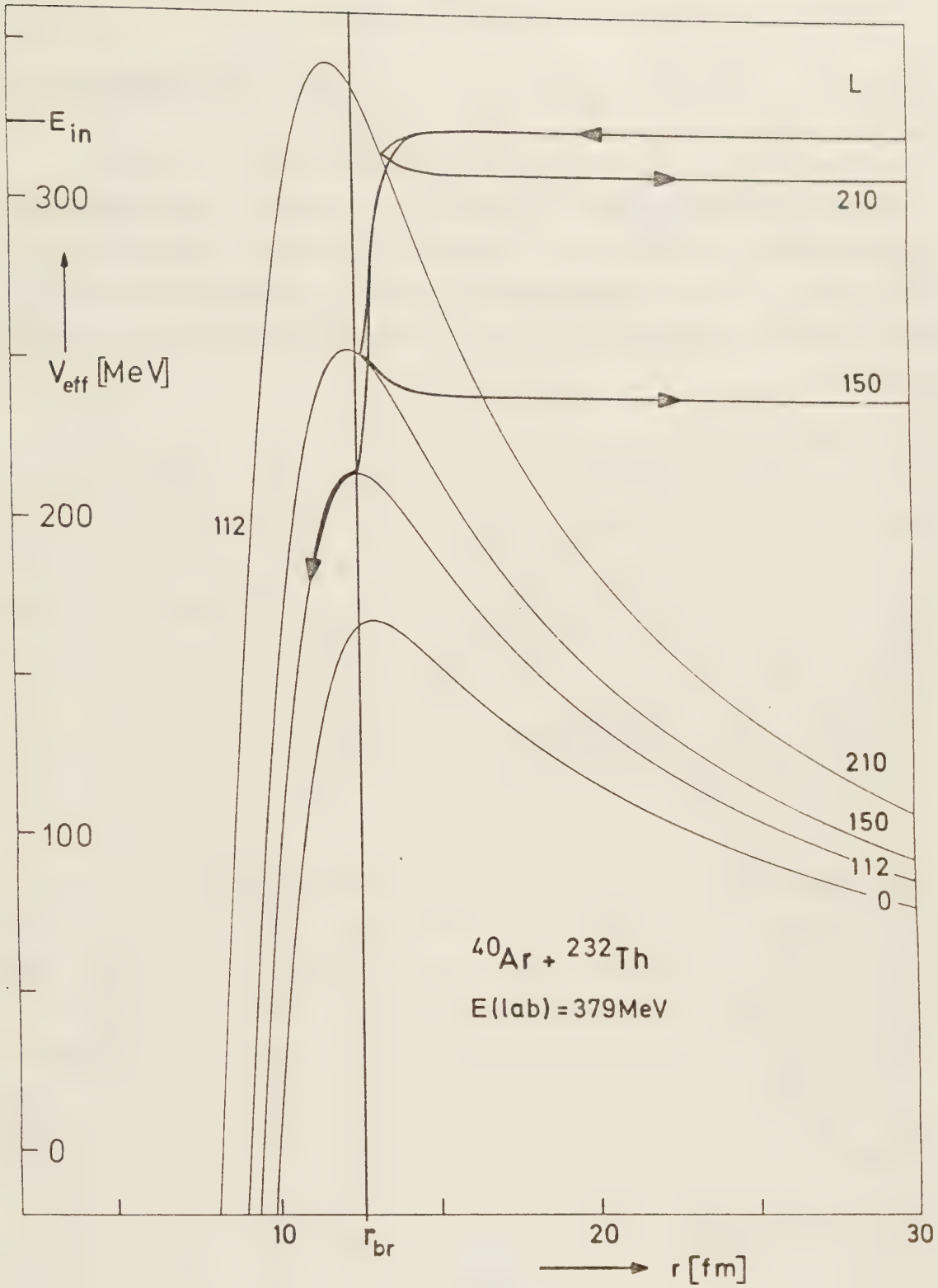


Abb. 29: Effektives Potential für Ar+Th, entnommen aus [64]. Eingefügt ist der "Bremsradius" r_{br}, der den kritischen Drehimpuls bei 112ħ hervorbrächte, sobald die Einschußenergie 220 MeV überstiege.

men könnten mikroskopische Vorgänge in der Oberflächenschicht oder die Vorgeschichte der Kerne sein.

Ebenfalls wünschenswert wäre es, andere Freiheitsgrade hinzuzunehmen, insbesondere die Halsbildung (siehe Abschnitt 4.1.2). Ein solches Vorhaben dürfte rechnerisch aufwendig, grundsätzlich aber mit der klassischen Hydrodynamik zu bewältigen sein.

5. Rückblick

In dieser Zusammenfassung sollen diejenigen Probleme hervorgehoben werden, deren Lösung besonders schwierig war. Es ist ja nicht ausgeschlossen, daß die Schwierigkeiten in der Natur der Sache liegen, so daß die nun folgende gewichtende Darstellung vielleicht ein besseres Verständnis der gesamten Arbeit ermöglicht.

Es sollte untersucht werden, inwieweit der Materieaustausch in Schwerionenreaktionen in kollektiven Moden abläuft. Die erforderlichen Potentiale waren sehr gut bekannt, genauer, als es für Abschätzungen erforderlich war. Doch für den Trägheitsparameter des Massenaustauschs (später $\varkappa$ genannt) gab es keinen Anhaltspunkt. Die ersten Abschätzungen (Abschnitte 2.2 und 2.3) gelangen erst, als klar wurde, daß sich die kinetische Energie in der Umgebung des Halses konzentriert. Daraus folgte alsbald die Gesetzmäßikeit $\varkappa \propto 1/w$ (vgl. (2.12)).

Der Trägheitsparameter $\varkappa$ ermöglichte die Abschätzung von Relaxationszeiten des Ladungsausgleichs in Schwerionenreaktionen. Beim Vergleich mit experimentellen Angaben zeigte es sich, daß unsere Relaxationszeiten zumindest größenordnungsmäßig stimmen. Auf diese Weise konnte eine Verzögerung des Ladungsausgleichs durch eine dominierende Reibung ausgeschlossen und damit erstmalig Trägheitseffekte im Materieaustausch von schweren Kernen nachgewiesen werden.

Daraufhin lag es nahe, auch den Massenaustausch auf Kollektivität zu prüfen. Da dieser Prozeß viel langsamer als die Ladungsäquilibrierung ist, durfte die Kopplung zwischen Massenaustausch und Relativbewegung nicht vernachlässigt werden. Darum mußten möglichst exakte und übersichtliche Formeln für die Trägheitsparameter $\varkappa$, λ und μ (vgl. (3.2)) gefunden werden, um sie leicht in Trajektorienrechnungen einsetzen zu können.

Es stellte sich heraus, daß Toruskoordinaten für die

Beschreibung zweier kugelförmiger Kerne mit beliebigem Abstand und beliebiger Asymmetrie ausgezeichnet geeignet waren. Diese Koordinaten haben jedoch den Nachteil, daß sie die Lösung der hydrodynamisch wichtigen Neumannschen Randwertaufgabe nicht gestatten (Abschnitt 3.2). Einen Ausweg aus diesem Dilemma brachte erst die Stokessche Stromfunktion. Sie konnte leicht als Mehler-Fock-Transformation dargestellt werden. Größere Schwierigkeiten bereitete die Berechnung der kinetischen Energie, da die hier zu bewältigenden Integrationen so zahlreich waren, daß eine numerische Lösung von Anfang an doch günstiger erschien. Die Lösung des Problem gelang mit der Umformung (3.39), die die Anwendung der Parseval-Relation auf die kinetische Energie ermöglichte. Der schönste Erfolg der anschließenden Rechnungen dürften die asymptotisch exakten Formeln (3.57) für die Trägheitsparameter κ, λ und μ sein.

Bei der numerischen Berechnung der Trajektorien war die Aufstellung geeigneter Anfangsbedingungen für den Asymmetriefreiheitsgrad besonders schwierig. Ursache war die Singularität des Trägheitsparameters κ. Zuerst erschien es ausreichend, die Asymmetriegeschwindigkeit bis zur Berührung gleich Null zu setzen. Wegen der Singularität aber kann das numerische Programm Anfangsvorgaben erst akzeptieren, wenn die Berührung längst erfolgt ist und die Kugeln schon überlappen. Bei einem solchen Verfahren bleibt das Wesentliche, die Überwindung der Singularität, im Dunkeln. Analytische Untersuchungen lieferten eine vollständige Übersicht über die möglichen Lösungstypen in der Umgebung von Berührung und Trennung: Es gibt eine "1-Lösung" und eine unendliche Schar von "1/2-Lösungen". Welcher Lösungstyp oder, gleichwertig damit, welcher Anfangsimpuls p_a^o der Asymmetrie ist naturgemäß? Diese Frage konnte erst beantwortet werden, nachdem es sich als zwecklos herausgestellt hatte, mit inneren Eigenschaften des Differentialgleichungssystems (4.3) und (4.6) die Vieldeutigkeit zu beseitigen. Vielmehr mußten die Grundlagen der Hydrodynamik herangezogen und mit dem Formalismus der kollektiven Variablen verglichen werden (Abschnitt 4.1.2 und Anhang B). Diese Prüfung ergab, daß die 1/2-Lösungen unphysikalisch sind und führte so

auf die Berührungsbedingungen (4.27).

Daneben galt es, auf eine berechtigte Kritik einzugehen: Sicherlich ist die Hydrodynamik nicht die beste Beschreibung der Kernmaterie. Unsere Rechnungen sollen auch nur einen ersten Anhaltspunkt markieren. Demzufolge war es wichtig herauszufinden, ob nicht kleine, vielleicht physikalisch unwichtige Eigenschaften der Trägheitsparameter die Trajektorienrechnung wesentlich beeinflussen. Zu diesem Zweck wurden die Orts- und Impulsflächen des Abschnitts 4.1.3 entwickelt. Sie zeigten erstens die nahezu vollständige Herrschaft der Rotationsenergie und zweitens, daß die absolute Größe des Trägheitsparameters κ der richtige Parameter ist, um die Geschwindigkeit des Massentransfers zu regeln. Sonstige Details an κ und λ beinflussen den qualitativen Verlauf der Trajektorien nicht.

Die Erweiterung des Reibungsmodells um den Massentransfer war eine Routineangelegenheit. Leider war damals ein direkter Vergleich mit den Experimenten unmöglich, so daß nur aufbereitete Daten benutzt konnten. Es zeigte sich, daß der berechnete Massentransfer eine Größenordnung zu schnell war (Abschnitt 4.2.4). Somit lag die Vermutung nahe, daß der Massentransfer im Gegensatz zum Ladungsausgleich sehr stark gedämpft sein müßte. Daß aber auch hier die Dämpfung keine ausschließliche Rolle spielt, kam in den Ablenkfunktionen der Orbiting-Reaktionen zu Ausdruck (Abschnitt 4.2.2): Das Orbiting ist ein äußerst unstabiler Bewegungszustand, mit dem nur ein einheitlich gerichteter Massentransfer ohne starke Dissipation verträglich ist.

Es gibt also deutliche Hinweise dafür, daß kollektive Moden sowohl den Ladungsausgleich als auch den Massentransfer in Schwerionenreaktionen verursachen. Glücklicherweise sind in den letzten Monaten umfangreiche experimentelle Untersuchungen durchgeführt worden, die eine Präzisierung des Modells gestatten werden.

Anhang A: Zur Auswertung des Trägheitstensors

Hier werden die wichtigsten Schritte der elementaren, aber langwierigen Berechnungen, die im Abschnitt 3.4 fehlen, wiedergegeben.

Der Randanteil T_R der kinetischen Energie (3.39) reduziert sich auf ein Integral mit rationalem Integranden, wenn man $x=\cosh\eta$ substituiert. Die Auswertung liefert

$$T_R = \frac{\dot{a}^2\pi}{18w}\left\{\frac{8\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^4}\cdot\ln\frac{2}{1-\cos\vartheta}+\frac{\sin\vartheta(2+7\cos\vartheta-7\cos^2\vartheta)}{3(1+\cos\vartheta)^4}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}$$

$$+\frac{\dot{a}\dot{w}\pi w}{3}\left\{-\frac{4\sin^2\vartheta\cos\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^2}\cdot\ln\frac{2}{1-\cos\vartheta}+\frac{1+20\cos\vartheta-5\cos^2\vartheta}{6(1+\cos\vartheta)^2}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \qquad (A.1)$$

$$+\frac{\dot{w}^2\pi w^3}{2}\left\{\frac{2\sin^3\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^4}\ln\frac{2}{1-\cos\vartheta}-\frac{4-7\cos\vartheta+\cos^2\vartheta}{3\sin\vartheta(1+\cos\vartheta)}\right\}_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}.$$

Die Umformung des Parsevalanteils T_P (3.40) ist komplizierter. Zuerst wird der Zuwachs $\tilde{\Psi}\cdot\partial_\vartheta\tilde{\Psi}\big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$ ausgerechnet. Aus der Definition in (3.17) folgt:

$$\tilde{\Psi}\cdot\partial_\vartheta\tilde{\Psi}\Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \operatorname{cosech}(\vartheta_2-\vartheta_1)\tau\cdot\left(\cosh(\vartheta_2-\vartheta_1)\tau\cdot(\hat{\Psi}_1^2+\hat{\Psi}_2^2)-2\hat{\Psi}_1\cdot\hat{\Psi}_2\right). \qquad (A.2)$$

Die drei Summanden auf der rechten Seite veranlassen unterschiedliches asymptotisches Verhalten der einzelnen Terme im Integral (3.40) für $\tau\to\infty$. Die Art der Asymptotik hängt von ϑ_1 und ϑ_2 ab: Für $0<\vartheta_1<\pi<\vartheta_2<2\pi$ sind diese Terme proportional zu $\exp(-2\vartheta_1\tau)$, $\exp(-2(2\pi-\vartheta_2)\tau)$ und $\exp(-2\pi\tau)$. Die ersten beiden Summanden in (A.2) verursachen somit Divergenzen für den wichtigen Fall zweier einander schwach überlappenden Kugeln, d.h. $\vartheta_1\to 0$, $\vartheta_2\to 2\pi$. Um diese Singularitäten in den Griff zu bekommen, sollen von (3.40) Integrale, die die Divergenzen enthalten, abgespaltet und durch elementare Funktionen ausgedrückt werden.

In die beiden ersten Summanden von (A.2) werden die $\hat{\Psi}_i(\tau)$ aus (3.32) eingesetzt. Dabei stößt man auf Ausdrücke der Form

$$\cosh(\vartheta_2-\vartheta_1)\tau\Big(\sum_{\nu=0}^{2}\alpha_\nu\,\partial^\nu_{\vartheta_i}\cosh(\pi-\vartheta_1)\tau\Big)^2$$

$$=\sum_{\mu,\nu=0}^{2}\alpha_\mu\alpha_\nu\cdot\partial^\mu_{\vartheta'}\,\partial^\nu_{\vartheta''}\cdot\cosh(\vartheta_2-\vartheta_1)\tau\cdot\cosh(\pi-\vartheta')\tau\cdot\cosh(\pi-\vartheta'')\tau\Big|_{\vartheta'=\vartheta''=\vartheta_1}. \tag{A.3}$$

Mit der Identität

$$\cosh(\vartheta_2-\vartheta_1)\tau\cdot\cosh(\pi-\vartheta')\tau\cdot\cosh(\pi-\vartheta'')\tau$$

$$=\sinh(\vartheta_2-\vartheta_1)\tau\cdot\sinh(\pi-\vartheta')\tau\cdot\cosh(\pi-\vartheta'')\tau+\cosh(\pi-\vartheta'-\vartheta_2+\vartheta_1)\tau\cdot\cosh(\pi-\vartheta'')\tau \tag{A.4}$$

und ihrem Analogon, in dem die Indices 1 und 2 vertauscht sind, kann ein Teil von (A.3) isoliert werden, vor dem der Faktor $\sinh(\vartheta_2-\vartheta_1)\tau$ steht. Der Rest zusammen mit dem dritten Summanden von (A.2) ergibt

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{2}\Big(\alpha_\mu(\vartheta_1)\alpha_\nu(\vartheta_1)\,\partial^\mu_{\vartheta'}\,\partial^\nu_{\vartheta''}\cosh(\pi-\vartheta'-\vartheta_2+\vartheta_1)\tau\cdot\cosh(\pi-\vartheta'')\tau\Big|_{\vartheta'=\vartheta''=\vartheta_1}$$

$$+\alpha_\mu(\vartheta_2)\alpha_\nu(\vartheta_2)\,\partial^\mu_{\vartheta'}\,\partial^\nu_{\vartheta''}\cosh(\pi-\vartheta'+\vartheta_2-\vartheta_1)\tau\cdot\cosh(\pi-\vartheta'')\tau\Big|_{\vartheta'=\vartheta''=\vartheta_2} \tag{A.5}$$

$$-2\alpha_\mu(\vartheta_1)\alpha_\nu(\vartheta_2)\,\partial^\mu_{\vartheta_1}\partial^\nu_{\vartheta_2}\cosh(\pi-\vartheta_1)\tau\cdot\cosh(\pi-\vartheta_2)\tau$$

$$=\sum_{\mu,\nu=0}^{2}\big(\alpha_\mu(\vartheta_1)\alpha_\nu(\vartheta_1)+\alpha_\mu(\vartheta_2)\alpha_\nu(\vartheta_2)-2\alpha_\mu(\vartheta_1)\alpha_\nu(\vartheta_2)\big)\partial^\mu_{\vartheta_1}\partial^\nu_{\vartheta_2}\cosh(\pi-\vartheta_1)\tau\cdot\cosh(\pi-\vartheta_2)\tau$$

Wenn der Faktor mit den α-Koeffizienten auf der rechten Seite dieser Gleichung in seine bezüglich μ und ν symmetrischen und antisymmetrischen Bestandteile zerlegt wird,

$$\alpha_\mu(\vartheta_1)\alpha_\nu(\vartheta_1)+\alpha_\mu(\vartheta_2)\alpha_\nu(\vartheta_2)-2\alpha_\mu(\vartheta_1)\alpha_\nu(\vartheta_2)=$$

$$=\big(\alpha_\mu(\vartheta_1)-\alpha_\mu(\vartheta_2)\big)\big(\alpha_\nu(\vartheta_1)-\alpha_\nu(\vartheta_2)\big)-\big(\alpha_\mu(\vartheta_1)\alpha_\nu(\vartheta_2)-\alpha_\mu(\vartheta_2)\alpha_\nu(\vartheta_1)\big), \tag{A.6}$$

kann man sehen, daß der antisymmetrische Beitrag den Faktor $\sinh(\vartheta_2-\vartheta_1)\tau$ enthält. Alle Beiträge aus (A.5) und (A.6) zusammen führen schließlich auf

$$\tau\cdot\sinh^2\pi\tau\cdot\tilde{\Psi}(\tau,\vartheta)\cdot\partial_\vartheta\tilde{\Psi}(\tau,\vartheta)\Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} =$$

$$=\sum_{\mu,\nu=0}^{2}\alpha_\mu(\vartheta)\cdot\alpha_\nu(\vartheta)\cdot\partial_\vartheta^\mu\sinh(\pi-\vartheta)\tau\cdot\partial_\vartheta^\nu\cosh(\pi-\vartheta)\tau\Big|_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=0}^{2}(-)^\mu\left(\alpha_\mu(\vartheta_1)\alpha_\nu(\vartheta_2)-\alpha_\mu(\vartheta_2)\alpha_\nu(\vartheta_1)\right)+ \qquad (A.7)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=0}^{2}\left(\alpha_\mu(\vartheta_1)-\alpha_\mu(\vartheta_2)\right)\left(\alpha_\nu(\vartheta_1)-\alpha_\mu(\vartheta_2)\right)\operatorname{cosech}(\vartheta_2-\vartheta_1)\tau\cdot$$

$$\cdot\left(\partial_{\vartheta_1}^\mu\cosh(\pi-\vartheta_1)\tau\cdot\partial_{\vartheta_2}^\nu\cosh(\pi-\vartheta_2)\tau+\partial_{\vartheta_2}^\mu\cosh(\pi-\vartheta_2)\tau\cdot\partial_{\vartheta_1}^\nu\cosh(\pi-\vartheta_1)\tau\right).$$

Werden die ersten beiden Summen in (3.40) eingesetzt, so entstehen Integrale, die mit elementaren Funktionen ausgewertet werden können. Alle diese Integrale können aus

$$\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}\frac{\sinh(\pi-\vartheta)t}{\sinh\pi t}=\frac{\pi-\vartheta}{2}\cdot\cos\vartheta+\sin\vartheta\cdot\ln\left(2\cdot\sin\frac{\vartheta}{2}\right) \qquad (A.8)$$

durch Differentiation nach ϑ abgeleitet werden [75]. Die dritte Summe in (A.7) macht die Einführung der Integrale K_2, K_3 und K_4, die in (3.45) definiert sind, unumgänglich.

Sammelt man jetzt alle Beiträge zu T_P, setzt für die Koeffizienten α_ν die expliziten Ausdrücke (3.33) ein und addiert T_R aus (A.1), erhält man die Trägheitsparameter (3.42) bis (3.44). Der singuläre Teil des Integrals (3.40) ist nun durch die Funktion (A.8) und ihre Ableitungen gegeben[1]. Die Integranden der Integrale (3.45) fallen asymptotisch wie $\exp(-2\pi\tau)$ ab, unabhängig von ϑ_1 und ϑ_2. Die Summanden in (3.42) bis (3.44), die diese Integrale enthalten, bleiben für $\vartheta_1\to 0$, $\vartheta_2\to 2\pi$ endlich.

---

[1] Nebenbei sei bemerkt, daß sich bei der Zusammenfassung alle Terme mit dem Faktor $\ln(2\sin\vartheta/2)$ herausheben.

Anhang B: Grundsätzliches zur Mathematik des Tröpfchenstoßes

Zur mathematischen Untersuchung des Stoßes zweier Tropfen aus idealer Flüssigkeit stehen folgende Gleichungen zur Verfügung:

α. Inkompressibilität und Rotationsfreiheit des gesamten Geschwindigkeitsfeldes $\underline{v}$

$$\operatorname{div}\underline{v}=0, \quad \operatorname{rot}\underline{v}=0, \tag{B.1}$$

β. die Eulergleichung [76]

$$D\frac{d\underline{v}}{dt}=\underline{F}-\operatorname{grad}p \tag{B.2}$$

mit der konstanten Dichte D, dem Druck p und der von außen angreifenden Volumenkraft $\underline{F}$ sowie

γ. die Randbedingungen der freien Oberfläche [77]

$$p_i-p_a=(1/R_1+1/R_2)\sigma, \tag{B.3}$$

daß nämlich die Differenz zwischen Innen- und Außendruck gleich dem Kohäsionsdruck sein muß. Der Kohäsionsdruck berechnet sich aus den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 in dem betrachteten Oberflächenpunkt und der überall konstanten Oberflächenspannung σ so, wie es die rechte Seite von (B.3) angibt.

Die Gleichungen (B.1) bis (B.3) kann man folgendermaßen lösen: Zunächst bestimmt man mit (B.1) ein Geschwindigkeitsfeld , das außer vom Ort noch von einer unendlichen Zahl von Parametern abhängt $\underline{v}=\underline{v}(\underline{r}\,|\,c_1,c_2,\ldots)$ derart, daß die Oberfläche der umschlossenen Flüssigkeit in jede beliebige Form gebracht werden kann. Mit diesem allgemeinen Feld geht man in die Gleichung (B.2) ein, die durch Linienintegration in die Bernoulligleichung überführt wird. Die Bernoulligleichung liefert den Zusammenhang zwischen dem Innendruck p_i, dem bekannten Kraftfeld $\underline{F}$ und den unbekannten Parametern $c_1,c_2,\ldots$ sowie ihren Geschwindigkeiten $\dot{c}_1,\dot{c}_2,\ldots$. Mittels (B.3) kann hieraus der Innendruck zugunsten des bekannten

Außendrucks und des von den $c_1, c_2, \ldots$ abhängigen Kohäsionsdrucks eliminiert werden. Auf diese Weise erhält man ein unendliches, nichtlineares Differentialgleichungssystem für die Parameter $c_1, c_2, \ldots$. Ist dieses unter Beachtung der vorgegebenen Anfangsverteilung des Geschwindigkeitsfelds gelöst, so kann aus der Gleichung

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v}(\underline{r} | c_1(t), c_2(t), \ldots) \tag{B.4}$$

die Bahn jedes einzelnen Flüssigkeitsteilchens, insbesondere die zeitliche Entwicklung der Tröpfchenformen ermittelt werden.

Das einfachste Beispiel für das gerade beschriebene Integrationsverfahren dürfte die Theorie der Oberflächenwellen sein [78].

Für den Tröpfchenstoß soll aber eine einfachere Methode angewendet werden. Bekanntlich lassen sich die Gleichungen (B.2) und (B.3) aus dem Hamiltonschen Prinzip ableiten [79]. Davon ausgehend schränkt man durch eine vernünftige Wahl die Zahl der Parameter $c_1, c_2, \ldots$ ein und berechnet in Abhängigkeit von den ausgewählten Parametern Potential und Trägheitstensor, woraus sich unmittelbar eine Lagrangefunktion ergibt. Auf sie angewendet liefert das Hamiltonsche Prinzip Bewegungsgleichungen für die ausgewählten Parameter.

Das zuletzt beschriebene Verfahren vermeidet den Umweg über den Druck. Jedoch besteht gerade darin die Gefahr der Vereinfachung. Denn bei der "vernünftigen Wahl" der Parameter wird vorausgesetzt, daß die Randbedingung (B.3) bei den nunmehr eingeschränkten Bewegungsformen ganz von selbst erfüllt ist. Das kann zu Vieldeutigkeiten in den Lösungen der Differentialgleichungen führen, die es in Wirklichkeit gar nicht gibt (vgl. Abschnitt 4.1.2). Im Zweifelsfall hat man also die fundamentalen Gleichungen (B.2) und (B.3) zu konsultieren.

Literaturverzeichnis

[1] Galin, J., Journal de Physique 37(1976)C5-83

[2] Wilczynski, J., Phys. Lett. 47B(1973)484

[3] Schröder, W.U. u. J.R. Huizenga, Ann. Rev. Nucl. Sci. 27(1977)465

[4] Sann, H. u.a., GSI-Preprint 1977

[5] Moretto, L.G. u. R. Schmitt, J. de Physique 37(1976) C5-109

[6] Gatty, B. u.a., Z. Physik A273(1975)65

[7] Bohr, A. u. B.R. Mottelson, Nuclear Structure, Bd. II, Benjamin, London 1975

[8] Pitthan, R. u.a., Naval Postgraduate School Monterey, Preprint 1978

[9] Wilets, L., Theories of Nuclear Fission, Clarendon Press, Oxford 1964

[10] Groß, D. u. H. Kalinowski, Phys. Rep. 45(1978)175

[11] Broglia, R.A. u.a., Phys. Lett. 73B(1978)405

[12] Nörenberg, W., Phys. Lett. 53B(1974)289

[13] Moretto, L.G. u.a., Phys. Lett. 58B(1975)31

[14] Artukh,A.G. u.a., Nucl. Phys. A215(1973)91

[15] De, J.N. u. D. Sperber, Phys. Lett. 72B(1978)293

[16] Nörenberg, W., Z. Physik A274(1975)241

[17] Ayik, S., B. Schürmann u. W. Nörenberg, Preprint MPI H-1976-V3

[18] Hofmann, H. u. P.J. Siemens, Nucl. Phys. A257(1976)165

———————————, Nucl. Phys. A275(1977)464

[19] Ngô, C. u. H. Hofmann, Z. Physik A282(1977)83

[20] Agassi, D., C.M. Ko u. H.A. Weidenmüller, Ann. Phys. 107(1977)140

———————————, Preprint MPI H-1977-V5

[21] ———————————, Preprint MPI H-1977-V31

[22] Ayik, S. u. W. Nörenberg, GSI-Bericht VT-1-1978

[23] Moretto, L.G. u. J.S. Sventek, Phys. Lett. 58B(1975)26

[24] Hartmann, K.M., Preprint TU München 1978

[25] Plumlee, H.R. u. R.G. Semonin, Tellus 17(1965)3

[26] Nix, J.R. u. A.J. Sierk, Phys. Rev. C15(1977)2072
[27] Kratz,J.V. u.a., Phys. Rev. Lett. 39(1977)984
[28] Seeger, P.A., Atomic Masses and Fundamental Constants (Proc. Fourth Conf. Teddington, 1971), Plenum, London 1972, S.255
[29] Migdal, A.B., Journ. Phys. USSR 8(1944)337
Goldhaber,M. u. E. Teller, Phys. Rev. 74(1948)1046
Steinwedel, H. u. J.H.D. Jensen, Z. f. Naturforschg. 5a(1950)413
[30] Lichtner, P. u.a., Phys. Lett. 45B(1973)175
[31] Morse, P.M. u. H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York 1953, S.1294
[32] Kan, K.-K., Thesis, University of Maryland 1975
[33] Bohr, A. u. B.R. Mottelson, l.c., S.351,529,531
———————————, Dan. Math.-fys. Medd. 30(1955)Nr.1
[34] Lamb, H., Hydrodynamics, 6. Aufl., Cambridge Univ. Pr., London 1975, S.47
[35] Werner, F.G. u. J.A. Wheeler, Superheavy Nuclei and the Kolesnikov-Larkin-Mottelson Effect in Spontaneous Fission, Anhang III, unveröffentlichter Bericht, Princeton University (ohne Datum)
Hasse, R.W., Habilitationsschrift, Universität München 1977
[36] Hasse, R.W., R. Ebert u. G. Süßmann, Nucl. Phys. A106 (1968)117
[37] Neumann, C., Theorie der Elektricitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe, Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses, Halle 1864
[38] Lebedev, N.N., Spezielle Funktionen und ihre Anwendung, BI, Zürich 1973, S.280
[39] Moon, P. u. D.E. Spencer, Field Theory Handbook, Springer-Verlag, Berlin 1961, S.96-97
[40] Lebedev, N.N., l.c., S.287
[41] Bôcher, M., Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, B.G. Teubner, Leipzig 1894, S.160-161

[42] Kurochkin, S.G. u. P.A. Cherdantsev, Isv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Fiz. 3(1971)157

[43] Stokes, G.G., Camb. Trans. VII(1842)

[44] Milne-Thomson, L.M., Theoretical Hydrodynamics, 4. Aufl., Macmillan, London 1960, S.453

[45] Klein, F., Höhere Geometrie, 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin 1926, S.53-56
Michell, J.H., Mess. Math. 19(1890)83

[46] Whittaker, E.T. u. G.N. Watson, A Course of Modern Analysis, 4. Aufl., Cambridge Univ. Pr., London 1973, Kap. XXIII
Lebedev, N.N., Tech. Phys. USSR 4(1937)3

[47] Payne, L.E. u. W.H. Pell, J. Fluid Mech. 7(1960)529
Pell, W.H. u. L.E. Payne, Quart. Appl. Math. 18(1960)257
Wakiya, S., J. Fluid Mech. 78(1976)737

[48] Sampson, R.A., Phil. Trans.A CLXXXII(1891)449, spez. S.480-481

[49] Sneddon, I.H., The Use of Integral Transforms, McGraw-Hill, New York 1972, S.416

[50] Magnus, W., F. Oberhettinger u. R.P. Soni, Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin 1966, S.175

[51] Sneddon, I.H., l.c., S.523

[52] Milne-Thomson, L.M., l.c., S.466

[53] Brosa, U., HMI-Preprint 1978

[54] Brosa, U. u. H.J. Krappe, HMI-Preprint 1978

[55] Helmholtz, H., Monatsber. d. königl. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1868, S.215

[56] Prandtl, L., Führer durch die Strömungslehre, 6. Aufl., Vieweg, Braunschweig 1965, S.45-48

[57] Błocki, J. u.a., Preprint LBL-6536(1977)

[58] Lawrentjew, M.A. u. B.W. Schabat, Methoden der komplexen Funktionentheorie, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967, S.293,307

[59] Sommerfeld, A., Mechanik, 8. Aufl., Geest&Portig K.-G., Leipzig 1968, S.26-27

[60] Gerthsen, C., Physik, 9. Aufl., Springer-Verlag, Berlin 1966, S.299-300

[61] Nix, J.R., Lecture Notes LA-DC-72-769(1972)
Krappe, H.J., HMI-Preprint 1976
[62] Baule, B., Analytische Geometrie, Verlag Hirzel, Leipzig 1943, S.47-48
[63] Groß, D.H.E., Lecture Notes IPNO/TH 77-10(1977)
[64] Kalinowski, H., Dissertation, FU Berlin 1975
[65] Błocki, J. u.a., Ann. Phys. 105(1977)427
[66] Randrup, J., Ann. Phys. 112(1978)356
[67] Nörenberg, W., 4° session d'étude bienalle de physique nucléaire, La Toussuire 1977, tome 2, C-10
[68] Gaudin, M., J. de Physique 35(1974)885
[69] Wolschin G. u. W. Nörenberg, Z. Physik A284(1978)209
[70] Bohr, A. u. B.R. Mottelson, l.c., S.351,529,531
[71] ————————————, Dan. Math.-fys. Medd. 30 (1955)Nr.1
[72] De, J.N. u.a., Z. Physik A227(1976)385
[73] Wilczyński, J., Nucl. Phys. A216(1973)386
[74] Miller, W.H., Advan. Chem. Phys. 25(1974)69
[75] Gröbner, W. u. N. Hofreiter, Integraltafel, 2. Teil, Springer-Verlag, Wien 1950, S.164
[76] Sommerfeld, A., Mechanik der deformierbaren Medien, 6. Aufl., Geest&Portig K.-G., Leipzig 1970, S.73
[77] Sommerfeld, A., l.c., S.83,111
[78] ————————————, S.151ff.
[79] ————————————, S.79ff.

Diese Dissertation ist in der Arbeitsgruppe für Theorie im Bereich Kern- und Strahlenphysik am Hahn-Meitner-Institut in Berlin angefertigt worden.

In Computerangelegenheiten unterstützten mich D. Schoening, B. Bohne, G. Thoma und P. Fröbrich. I. Lang hat die Abbildungen hergestellt. Die Mitarbeiter der Bibliothek haben mir auch schwer zugängliche Literatur beschafft.

Einen großen Teil dessen, was ich über Schwerionenreaktionen weiß, vermittelte mir D.H.E. Groß. Von seiner merkwürdigen Fähigkeit, experimentelle Daten zu deuten, habe ich sehr profitiert. H.J. Krappe überlies mir grundlegende physikalische Ideen. Mehrmals nahm er äußerst engagiert an meinen Untersuchungen Anteil. Mit stets hilfsbereiter Gelassenheit hat mir R. Lipperheide manchen Stolperstein aus dem Weg geräumt. Andererseits zwangen mich seine ungewöhnlich direkten Fragen, wichtige Punkte gründlicher auszuarbeiten.

Vielen Dank.

Lebenslauf

30.5.1950	in Berlin geboren. Eltern: Helga Brosa geb. Hadrich und Dr. Georg Brosa, beide Rechtsanwälte.
1956-1959	Grundschule in Berlin.
1959-1969	altsprachliches Steglitzer Gymnasium.
Februar 1969	Abitur.
1969-1976	Physikstudium an der Technischen Universität Berlin.
Mai 1971	Vordiplom.
Oktober 1972	Studienarbeit über das Thema "Mastergleichungen und Markoff-Prozesse".
August 1975	Diplomarbeit mit dem Titel "Zur Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung des Kapitza-Dirac-Effekts".
Februar 1976	Diplom-Hauptprüfung abgeschlossen.
1976-1979	wissenschaftlicher Angestellter am Hahn-Meitner-Institut in Berlin.